2024

ANNALES

Mathématiques Technologiques

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

FILIÈRE ÉCONOMIQUE

ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE .... PAGE 1

CORRIGÉ … .... PAGE 2

RAPPORT DU JURY .... PAGE 19

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

Exercice 1

1. (a)

$$
\begin{aligned}
A - I &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ainsi $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(b)

$$
\begin{aligned}
2M + I &= \frac{2}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\
\text{Alors } (2M+I)^2 &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{et } (2M+I)^3 &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

En conséquence $(2M+I)^3 = 0$.

(c) En développant le cube, à l'aide de la formule du binôme (en notant que M et I commutent),

$$\begin{aligned}(2M+I)^3 &= (2M)^3+3(2M)^2I+3(2M)I^2+I^3\\ &= 8M^3+12M^2+6M+I.\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $(2M+I)^3=0$.
Donc $8M^3+12M^2+6M+I=0$ ou encore $8M^3+12M^2+6M=-I$.
Ainsi $M(8M^2+12M+6I)=-I$.

(d) D'après la question précédente, $M(-8M^2-12M-6I)=I$.
Par définition de la matrice inverse, M est inversible et $M^{-1}=-8M^2-12M-6I$.

2. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}AX_n+B &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&-1&8\\4&4&-4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_n\\s_n\\t_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-s_n+8t_n\\4r_n+4s_n-4t_n\\2t_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}s_n+2t_n\\r_n+s_n-t_n\\\frac{1}{2}t_n+1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Puis en utilisant les relations de récurrence définissant les suites,

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}s_n+2t_n\\r_n+s_n-t_n\\\frac{1}{2}t_n+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_{n+1}\\s_{n+1}\\t_{n+1}\end{pmatrix}=X_{n+1}.$$

Par conséquent, $\forall n\in\mathbb{N},\ AX_n+B=X_{n+1}$.

3. (a)

$$AC+B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&-1&8\\4&4&-4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}8\\32\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}=C.$$

Donc $AC+B=C$.

(b) Rappelons que $I-A=-M$. Or M est inversible, Donc la matrice $I-A$ est inversible.

(c)

$$X=AX+B \iff X-AX=B \iff (I-A)X=B$$

Or $(I-A)$ est inversible. Donc il existe une unique solution à l'équation $(I-A)X=B$.
Or la matrice C est solution de cette équation.
Donc la matrice colonne C est l'unique solution de l'équation $X=AX+B$.

4. **Initialisation** $A^0 = I$. Donc $A^0(X_0 - C) = I(X_0 - C) = X_0 - C$.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X_n - C = A^n(X_0 - C)$.

   Or $X_{n+1} = AX_n + B$ et $AC + B = C$.

   Donc $X_{n+1} - C = AX_n + B - (AC + B) = A(X_n - C) = AA^n(X_0 - C) = A^{n+1}(X_0 - C)$

   Ainsi par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n - C = A^n(X_0 - C)$.

5. (a) Rappelons que $(2M + I)^3 = 0$ et que $M = A - I$. Alors $\Big(2(A - I) + I\Big)^3 = 0$ ou encore $(2A - I)^3 = 0$.

   Ainsi, le polynôme $(2x - 1)^3$ annule la matrice A, ses racines sont donc les seules valeurs propres possibles de A.

   Comme $\frac{1}{2}$ est la seule racine de $2x - 1$, $\frac{1}{2}$ est la seule valeur propre possible de A.

   (b) i. Si A est diagonalisable alors il existe une matrice inversible R et une matrice diagonale D telles que $A = RDR^{-1}$.

   La matrice D contenant nécessairement les valeurs propres de A, la diagonale de D est donc composée uniquement de valeur $\frac{1}{2}$, ainsi $D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I$

   d'où $A = RDR^{-1} \iff R^{-1}AR = R^{-1}RDR^{-1}R = D = \frac{1}{2}I$.

   Par conséquent, $R^{-1}AR = \frac{1}{2}I$.

   ii. D'après la question précédente, $A = RDR^{-1} = \frac{1}{2}RIR^{-1} = \frac{1}{2}RR^{-1} = \frac{1}{2}I$.

   Donc $A = \frac{1}{2}I$.

   iii. Si A est diagonalisable, alors $A = \frac{1}{2}I$.

   Or $A \neq \frac{1}{2}I$. Donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

6. (a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

   Ainsi $QP = \frac{1}{6} \times 12I = 2I$ d'où $QP = 2I$.

   (b) D'après la question précédente, $\left(\frac{1}{2}Q\right) P = I$ Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}Q$.

   (c)

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 16 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 48 \\ 24 & 24 & -24 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

   Donc $\frac{1}{4}PTQ = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 0 & -6 & 48 \\ 24 & 24 & -24 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$.

Ainsi $A = \dfrac{1}{4}PTQ$.

(d) **Initialisation** $T^0 = I$ et $A^0 = I$, alors $\dfrac{1}{2^{0+1}}PT^0Q = \dfrac{1}{2}PIQ = \dfrac{1}{2}PQ = \dfrac{1}{2} \times 2I = I = A^0$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = \dfrac{1}{2^{n+1}}PT^nQ$.

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= AA^n \\
&\underset{\substack{HR \\ \text{et } A=\frac{1}{4}PTQ}}{=} \frac{1}{4}PTQ \times \frac{1}{2^{n+1}}PT^nQ \\
&= \frac{1}{4 \times 2^{n+1}}PTQPT^nQ \\
&= \frac{1}{2 \times 2 \times 2^{n+1}}PT \times 2I \times T^nQ \\
&= \frac{2}{2 \times 2^{n+2}}PTT^nQ \\
&= \frac{1}{2^{n+2}}PT^{n+1}Q.
\end{aligned}$$

Ainsi par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \dfrac{1}{2^{n+1}}PT^nQ$.

(e) Remarquons que $T = I + 2J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I et J commutent et $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ alors $\forall k \geqslant 3$, $J^k = J^3J^{k-3} = 0$.
D'après la formule du binôme, pour tout $n \geqslant 2$,

$$T^n = (I+2J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(2J)^k I^{n-k} = \binom{n}{0}I + \binom{n}{1} \times 2J + \binom{n}{2} \times 2^2J^2 = I + 2nJ + 2n(n-1)J^2.$$

Pour $n = 0$, $T^0 = I = I + 2 * 0 * J + 2 * 0 * (0-1)J^2$
et pour $n = 1$, $T = I + 2J = I + 2 * 1J + 2 * 1(1-1) * J^2$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n = I + 2nJ + 2n(n-1)J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2n(n-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Comme $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'après les questions précédentes

$$\begin{aligned} X_n - C = A^n(X_0 - C) &= \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 - 2 \\ s_0 - 8 \\ t_0 - 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} -2n+2 & -n & -3n^2+11n \\ 4n & 2n+2 & 6n^2-10n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En calculant ligne par ligne,

$$\begin{aligned} r_n - 2 &= \frac{1}{2^{n+1}}(-2n + 3n^2 - 11n) = \frac{1}{2^{n+1}}(3n^2 - 13n), \\ s_n - 8 &= \frac{1}{2^{n+1}}(4n + 4 - 6n^2 + 10n) = \frac{1}{2^{n+1}}(-6n^2 + 14n + 4) = \frac{1}{2^n}(-3n^2 + 7n + 2) \\ \text{et } t_n - 2 &= \frac{1}{2^{n+1}} \times (-2) = -\frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = 2 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\Big(3n^2 - 13n\Big)$, $\quad s_n = 8 + \dfrac{1}{2^n}\Big(-3n^2 + 7n + 2\Big)$ et $t_n = 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

8. (a) En utilisant les propriétés du logarithme et en factorisant :

$$\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = \ln(n^2) - \ln(2^n) = 2\ln(n) - n\ln(2) = n\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right).$$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\ln(n)}{n} = 0$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right) = -\ln(2)$

et, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{2\ln(n)}{n} - \ln(2)\right) = -\infty$, ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n^2}{2^n}\right) = -\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2}{2^n}\right) = 0$.

Comme $\dfrac{n}{2^n} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n^2}{2^n}$, par produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{2^n}\right) = 0$.

(b) Pour tout entier naturel n, $r_n = 2 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\Big(3n^2 - 13n\Big) = 2 + \dfrac{3}{2} \times \dfrac{n^2}{2^n} - \dfrac{13}{2} \times \dfrac{n}{2^n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 2$.

Pour tout entier naturel n, $s_n = 8 + \dfrac{1}{2^n}\Big(-3n^2 + 7n + 2\Big) = 8 - 3 \times \dfrac{n^2}{2^n} + 7 \times \dfrac{n}{2^n} + 2$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 8$. Pour tout entier naturel n, $t_n = 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 2$.

Exercice 2

Partie 1

1. (a) Rappelons que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{1+e^x} = \dfrac{4}{1+0} = 4$.

   Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$ et la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ en $-\infty$.

   (b) Rappelons que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{1+e^x} = \dfrac{4}{1+(+\infty)} = 0$.

   Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

2. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 4\dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{-4e^x}{(1+e^x)^2}$.

   Comme la fonction exponentielle est toujours strictement positive, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-4e^x}{(1+e^x)^2} < 0$.

   (b) $f(0) = \dfrac{4}{1+e^0} = \dfrac{4}{2} = 2$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	4 ↘	2 ↘	0

   (c)

   D'après le tableau de variations, la courbe de f est toujours en-dessous de son asymptote d'équation $y = 4$.

   (d) L'équation de la tangente en $(0, f(0))$ est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$,

   avec $f(0) = 2$ et $f'(0) = \dfrac{-4e^0}{(1+e^0)^2} = -1$,

   Ainsi la tangente à la courbe de f en 0 admet pour équation $y = 2 - x$.

3. (a) La fonction f' est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) &= \frac{-4e^x \times (1+e^x)^2 - (-4e^x) \times 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} \\
&= \frac{-4e^x \times (1+e^x) + 4e^x \times 2e^x}{(1+e^x)^3} \\
&= \frac{-4e^x + 4e^{2x}}{(1+e^x)^3} \\
&= \frac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$.

(b) Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ et $(1+e^x)^3 > 0$, donc le signe de f'' est porté par le terme $e^x - 1$ qui s'annule et change de signe en $x = 0$, ainsi

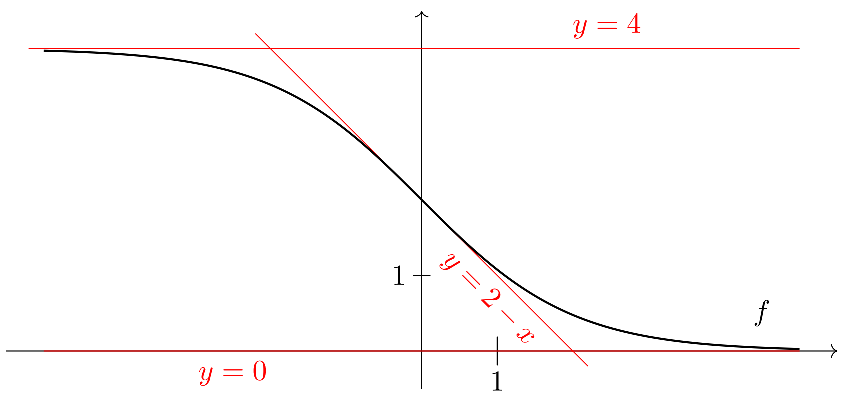
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	concave		convexe

Par conséquent, la fonction f est concave sur $]-\infty\,;0[$, convexe sur $]0\,;\,+\infty[$ et possède un unique point d'inflexion en $x = 0$.

(c) Comme la fonction f est concave sur $]-\infty, 0]$ puis convexe sur $[0, +\infty[$,

la tangente à f en $x = 0$ est située au-dessus de la courbe sur $]-\infty\,;0[$ puis elle passe en-dessous de la courbe sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. On obtient la courbe suivante



5. (a) En multipliant numérateur et dénominateur par e^{-x},

$$f(x) = \frac{4}{1+e^x} = \frac{4e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{4e^{-x}}{e^{-x}+e^x e^{-x}} = \frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 4\,\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\mathrm{d}t &= 4\int_0^x \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t \\
&= 4\Big[-\ln\big(1+e^{-t}\big)\Big]_0^x \\
&= -4\ln(1+e^{-x}) + 4\ln(1+e^0) \\
&= 4\ln(2) - 4\ln(1+e^{-x}).
\end{aligned}$$

Donc, la primitive de f s'annulant en 0 est $x \mapsto 4\ln(2) - 4\ln(1+e^{-x})$ définie sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

6. (a) La fonction f est continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $]0\,,\,4[$ d'après son tableau de variations, ainsi par le théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,,\,4[$.

   (b) i. Pour tout $y \in]0\,,\,4[$,

$$f(g(y)) = \frac{4}{1+e^{g(y)}} = \frac{4}{1+\exp\left(\ln\left(\frac{4}{y}-1\right)\right)} = \frac{4}{1+\frac{4}{y}-1} = \frac{4}{\frac{4}{y}} = y.$$

Ainsi $\forall y \in]0;4[,\ f(g(y)) = y$.

   ii. Le calcul précédent permet de voir que pour résoudre $f(x) = y$ où x est l'inconnue et y un paramètre dans l'ensemble image de f, il suffit de prendre $x = g(y)$.

Ainsi la fonction g est la réciproque de la fonction f.

   (c)

$$\begin{aligned}
0,05 \leqslant f(x) \leqslant 2 &\iff 0,05 \leqslant \frac{4}{1+e^x} \leqslant 2 \\
&\iff \frac{1}{2} \leqslant \frac{1+e^x}{4} \leqslant \frac{1}{0,05} \quad \text{par décroissance de la fonction inverse} \\
&\iff 2 \leqslant 1+e^x \leqslant 80 \quad \text{car } 4>0 \\
&\iff 1 \leqslant e^x \leqslant 79 \\
&\iff 0 \leqslant x \leqslant \ln(79) \quad \text{par croissance de la fonction } \ln
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$ est $[0;\ln(79)]$.

7. (a) Le profil étant donné par la fonction f, pour avoir uniquement la partie entre 2 mètres et 5 centimètres, il faut prendre le graphe de la fonction f entre les ordonnées 2 et $0,05$ (unités en mètre). Les abscisses correspondantes sont donc les x qui vérifient $0,05 \leqslant f(x) \leqslant 2$ donc $x \in [0\,;\,\ln(79)]$ (d'après la question précédente). La longueur de cet intervalle étant $\ln(79) - 0 = \ln(79)$, la longueur de la rampe au sol est de $\ln(79)$ mètres.

   (b) La surface latérale (grisée) étant le domaine compris entre le sol et le profil donné par f entre les abscisses 0 et $\ln(79)$, sa surface est donnée par l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln(79)} f(t)\mathrm{d}t$ unités en m^2.
En utilisant la primitive de f s'annulant en 0,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln(79)} f(t)\mathrm{d}t &= 4\ln(2) - 4\ln(1+e^{-\ln(79)}) \\
&= 4\ln(2) - 4\ln\left(1+\frac{1}{79}\right) \\
&= 4\ln(2) - 4\ln\left(\frac{80}{79}\right) \\
&= 4\ln\left(\frac{79}{40}\right).
\end{aligned}$$

La largeur de la rampe étant d'un mètre, le volume de béton nécessaire est la même valeur (en m^3), ainsi le volume de béton à prévoir est de $4\ln\left(\frac{79}{40}\right)$ m^3.

Partie 3

8. (a) Rappelons que $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \Big(4\ln(2) - 4\ln(1+e^{-x})\Big) = 4\ln(2) - \Big(4\ln(1+e^{-x})\Big)$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x}) = 1$.
Donc la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite en $+\infty$ qui vaut $4\ln(2)$.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $4\ln(2)$.

(b)
- La fonction h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- h est positive sur $\mathbb{R}$, en effet d'une part elle est nulle sur $]-\infty\,;0[$ et, d'autre part elle vaut f qui est positive d'après son tableau de variations sur $[0\,;+\infty[$.
- Par ailleurs son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 4\ln(2)$.

  Enfin, en choisissant $\alpha > 0$ tel que $\alpha \times 4\ln(2) = 1$ de sorte que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha h(t)\mathrm{d}t = \alpha \times 4\ln(2) = 1$

Par conséquent, la fonction $\dfrac{1}{4\ln(2)}h$ est une densité de probabilité.

(c)

$$F_U : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{array}$$

(d) Soit x un réel positif.
Alors $1 \geqslant e^{-x} > 0$. Donc $2 \geqslant 1 + e^{-x} > 1$.
Par croissance de la fonction ln, $\ln(2) \geqslant \ln(1+e^{-x}) > 0$.
Or $\ln(2) > 0$. Alors $1 \geqslant \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} > 0$.
Or $-1 < 0$. Donc $-1 \leqslant -\dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} < 0$.

Ainsi $\forall x \in [0\,;+\infty[, \qquad 0 \leqslant 1 - \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} < 1.$

(e)

$$\begin{aligned}[X \leqslant x] &= \left[-\ln\left(e^{(1-U)\ln(2)}-1\right) \leqslant x\right] \\ &= \left[e^{(1-U)\ln(2)}-1 \geqslant e^{-x}\right] \quad \text{par décroissance et bijectivité de } t \longmapsto e^{-t} \\ &= \left[e^{(1-U)\ln(2)} \geqslant 1+e^{-x}\right] \\ &= \left[(1-U)\ln(2) \geqslant \ln(1+e^{-x})\right] \quad \text{par croissance et bijectivité de } \ln .\end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in [0\,;+\infty[, \qquad P([X \leqslant x]) = P\left(\left[\ln(1+e^{-x}) \leqslant (1-U)\ln(2)\right]\right)$.

$$\begin{aligned}\left[(1-U)\ln(2) \geqslant \ln(1+e^{-x})\right] &= \left[1-U \geqslant \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}\right] \\ &= \left[U \leqslant 1-\frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}\right].\end{aligned}$$

Or $\forall x \in [0,+\infty[$, $1-\dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} \in [0\,;1[$.

Donc $P\left(U \leqslant 1-\dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}\right) = F_U\left(1-\dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}\right) = 1-\dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}$.

Au final, $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $P([X \leqslant x]) = 1-\dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)}$.

(f) Notons F_X la fonction de répartition de X.
Par croissance de la fonction de répartition, pour tout $x \in]-\infty\,,0[$, $0 \leqslant P([X \leqslant x]) \leqslant P([X \leqslant 0])$.
Or $P([X \leqslant 0]) = 1-\dfrac{\ln(1+e^{-0})}{\ln(2)} = 0.$
d'où $F_X(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$.
D'après la question précédente, $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-\dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln(2)} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$

La fonction F_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$F_X'(x) = 0-\frac{1}{\ln(2)}\times\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{\ln(2)}\times\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{4\ln(2)}\times\frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{f(x)}{4\ln(2)} = \frac{1}{4\ln(2)}h(x).$$

Donc $F_X' = \dfrac{1}{4\ln(2)}h$. Or d'après la question 8.(b), F_X' est une densité de probabilité.

Donc la variable aléatoire X admet $\dfrac{1}{4\ln(2)}h$ comme densité.

(g) À l'aide des questions précédentes, on obtient le code suivant.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

```
def simulX() :
    U = rd.random()
    X = -np.log( np.exp( (1-U)*np.log(2) ) -1 )
    return X
```

(h) Dans le script, la variable S additionne N simulations indépendantes de la variable aléatoire X, ainsi la quantité renvoyée par `secret(N)` est une moyenne empirique de N simulations de la variable aléatoire X, il s'agit de l'estimateur classique de l'espérance de X. Le graphique renvoyé montre ainsi l'estimation de l'espérance de X selon le nombre de simulations. On peut voir que plus le nombre de simulations augmente et plus les points du graphique se stabilisent autour d'une valeur commune d'environ $1,2$, qui doit être proche de la valeur de l'espérance de X. Cette stabilisation correspond à la loi faible des grands nombres.

Exercice 3

Partie 1

1. **Initialisation** $a_1 + b_1 + c_1 = \dfrac{3}{8} + 0 + \dfrac{5}{8} = \dfrac{8}{8} = 1.$

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $a_n + b_n + c_n = 1$.

   A l'aide des relations de récurrence :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} &= \frac{2}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{3}{11}c_n + \frac{4}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n + \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{4}{11} \\
&= \left(\frac{2}{11} + \frac{4}{11} + \frac{5}{11}\right)a_n + \left(\frac{3}{11} + \frac{3}{11} + \frac{5}{11}\right)b_n + \left(\frac{3}{11} + \frac{4}{11} + \frac{4}{11}\right)c_n \\
&= a_n + b_n + c_n \\
&= 1.
\end{aligned}$$

   Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n + b_n + c_n = 1.$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = a_n + b_n + c_n = 1$, donc la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante égale à 1.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= -a_{n+1} + 2b_{n+1} - c_{n+1} \\
&= \frac{-2}{11}a_n + \frac{-3}{11}b_n + \frac{-3}{11}c_n + \frac{8}{11}a_n + \frac{6}{11}b_n + \frac{8}{11}c_n + \frac{-5}{11}a_n + \frac{-5}{11}b_n + \frac{-4}{11} \\
&= \left(\frac{-2}{11} + \frac{8}{11} + \frac{-5}{11}\right)a_n + \left(\frac{-3}{11} + \frac{6}{11} + \frac{-5}{11}\right)b_n + \left(\frac{-3}{11} + \frac{8}{11} + \frac{-4}{11}\right)c_n \\
&= \frac{1}{11}a_n + \frac{2}{11}b_n + \frac{1}{11}c_n \\
&= -\frac{1}{11}(-a_n + 2b_n - c_n) \\
&= -\frac{1}{11}y_n.
\end{aligned}$$

   Ainsi la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est bien géométrique de raison $-\dfrac{1}{11}$.

(b) En tant que suite géométrique de raison $-\frac{1}{11}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad y_n = y_1 \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$.

Or $y_1 = -a_1 + 2b_1 - c_1 = \frac{-3}{8} + 0 + \frac{-5}{8} = -1$.

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = -\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= -5a_{n+1} - 5b_{n+1} + 7c_{n+1} \\ &= \frac{-10}{11}a_n + \frac{-15}{11}b_n + \frac{-15}{11}c_n + \frac{-20}{11}a_n + \frac{-15}{11}b_n + \frac{-20}{11}c_n + \frac{35}{11}a_n + \frac{35}{11}b_n + \frac{28}{11} \\ &= \left(\frac{-10}{11} + \frac{-20}{11} + \frac{35}{11}\right)a_n + \left(\frac{-15}{11} + \frac{-15}{11} + \frac{35}{11}\right)b_n + \left(\frac{-15}{11} + \frac{-20}{11} + \frac{28}{11}\right)c_n \\ &= \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{-7}{11}c_n \\ &= -\frac{1}{11}(-5a_n - 5b_n + 7c_n) \\ &= -\frac{1}{11}z_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi la suite } (z_n)_{n\geqslant 1} \text{ est aussi géométrique de raison } -\frac{1}{11}.}$$

(b) En tant que suite géométrique de raison $-\frac{1}{11}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad z_n = z_1 \left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}$.

Or $z_1 = -5a_1 - 5b_1 + 7c_1 = \frac{-15}{8} + 0 + \frac{35}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$.

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.}$$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{3}(x_n + y_n) = \frac{1}{3}(a_n + b_n + c_n - a_n + 2b_n - c_n) = \frac{1}{3} \times 3b_n = b_n$$

et

$$\frac{1}{12}(5x_n + z_n) = \frac{1}{12}(5a_n + 5b_n + 5c_n - 5a_n - 5b_n + 7c_n) = \frac{1}{12} \times 12b_n = c_n$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{12}(5x_n + z_n).}$$

(b) D'après la question 2., la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 - b_n - c_n$

$$\begin{aligned} \text{Alors } a_n &= 1 - \frac{1}{3}(x_n + y_n) - \frac{1}{12}(5x_n + z_n) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{12}\right)x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{12}z_n \\ &= 1 - \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{12}z_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1 - \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{12}z_n.}$$

(c) A l'aide des questions précédentes :

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 - \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{1}{12}z_n \\
&= 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \times \left(-\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}\right) - \frac{1}{12} \times \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \times \frac{5}{2}\right)\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}, \\
b_n &= \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(-\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \\
\text{et } c_n &= \frac{5}{12}x_n + \frac{1}{12}z_n \\
&= \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \times \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \\
&= \frac{5}{12} + \frac{5}{24}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Au final, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}, \quad b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{5}{12} + \frac{5}{24}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}.}$$

6. Comme $-1 < -\frac{1}{11} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{11}\right)^n = 0$,

$$\boxed{\text{ainsi } \lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{4}, \qquad \lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{5}{12}.}$$

Partie 2

7. Pour le premier poisson pêché, les perches ne sont pas disponibles, la probabilité d'en pêcher une est donc nulle. Le pêcheur ne peut attraper que l'un des 3 goujons ou l'une des 5 truites avec équiprobabilités sur ces 8 poissons,

$$\boxed{\text{ainsi } g_1 = P(G_1) = \frac{3}{8}, \qquad p_1 = P(P_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad t_1 = P(T_1) = \frac{5}{8}.}$$

8. (a) Si l'événement G_1 est réalisé alors l'étang contient 2 goujons, 3 perches et 5 truites. Par équiprobabilité, la probabilité d'attraper un goujon dans ces conditions est de

$\dfrac{2}{2+3+5} = \dfrac{2}{11}$.

De même, si l'événement T_1 est réalisé alors l'étang contient 3 goujons, 3 perches et 4 truites. Par équiprobabilité, la probabilité d'attraper un goujon dans ces conditions est de $\dfrac{3}{3+4+4} = \dfrac{3}{11}$.

Ainsi $P_{G_1}(G_2) = \dfrac{2}{11}$ et $P_{T_1}(G_2) = \dfrac{3}{11}$.

(b) Les événements G_1, P_1 et T_1 forment un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales,

$$P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(P_1 \cap G_2) + P(T_1 \cap G_2).$$

Cependant, $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1)P_{G_1}(G_2) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{11} = \dfrac{6}{88}$, et $P(P_1 \cap G_2) = 0$ car P_1 est un événement impossible, et $P(T_1 \cap G_2) = P(T_1)P_{T_1}(G_2) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{11} = \dfrac{15}{88}$.

Ainsi $P(G_2) = \dfrac{21}{88}$.

9. D'après la formule de Bayes :

$$P_{G_2}(T_1) = \frac{P_{T_1}(G_2)P(T_1)}{P(G_2)} = \frac{\frac{5}{8} \times \frac{3}{11}}{\frac{21}{88}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}.$$

Donc $P_{G_2}(T_1) = \dfrac{5}{7}$.

10. (a) Si l'événement G_n est réalisé alors l'étang contient 2 goujons, 3 perches et 5 truites pour attraper le poisson suivant. Par équiprobabilité, la probabilité d'attraper un goujon dans ces conditions est de $P_{G_n}(G_{n+1}) = \dfrac{2}{11}$.

De même, si l'événement P_n est réalisé alors l'étang contient 3 goujons, 2 perches et 5 truites pour attraper le poisson suivant. Par équiprobabilité, la probabilité d'attraper un goujon dans ces conditions est de $P_{P_n}(G_{n+1}) = \dfrac{3}{11}$.

De même, si l'événement T_n est réalisé alors l'étang contient 3 goujons, 3 perches et 4 truites pour attraper le poisson suivant. Par équiprobabilité, la probabilité d'attraper un goujon dans ces conditions est de $P_{T_n}(G_{n+1}) = \dfrac{3}{11}$.

Ainsi $P_{G_n}(G_{n+1}) = \dfrac{2}{11}$, $P_{P_n}(G_{n+1}) = \dfrac{3}{11}$ et $P_{T_n}(G_{n+1}) = \dfrac{3}{11}$.

(b) Les événements G_n, P_n et T_n forment un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales

$$g_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(P_n \cap G_{n+1}) + P(T_n \cap G_{n+1}).$$

Cependant, $P(G_n \cap G_{n+1}) = P(G_n)P_{G_n}(G_{n+1}) = \dfrac{2}{11}g_n$,

$P(P_n \cap G_{n+1}) = P(P_n)P_{P_n}(G_{n+1}) = \dfrac{3}{11}p_n$ et $P(T_n \cap G_{n+1}) = P(T_n)P_{T_n}(G_{n+1}) = \dfrac{3}{11}t_n$.

Ainsi $g_{n+1} = P(G_{n+1}) = \dfrac{2}{11}g_n + \dfrac{3}{11}p_n + \dfrac{3}{11}t_n$.

(c) $p_{n+1} = P(P_{n+1}) = \frac{4}{11}g_n + \frac{3}{11}p_n + \frac{4}{11}t_n$ et $t_{n+1} = P(T_{n+1}) = \frac{5}{11}g_n + \frac{5}{11}p_n + \frac{4}{11}t_n$.

11. Les suites $(g_n)_{n\geqslant 1}$, $(p_n)_{n\geqslant 1}$ et $(t_n)_{n\geqslant 1}$ ont les mêmes valeurs initiales et suivent les mêmes relations de récurrence que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$ respectivement, elles ont donc les mêmes expressions : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} g_n = a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \\ p_n = b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1} \\ t_n = c_n = \frac{5}{12} + \frac{5}{24}\left(-\frac{1}{11}\right)^{n-1}. \end{cases}$

Partie 3

12. (a) La clef primaire de la table `poissons` est `id`.

(b) `UPDATE poissons SET taille = 610 WHERE espece = "goujon"`

(c) `SELECT espece FROM poissons WHERE taille >= 125 AND protection = 0`

13. (a) Pendant une seule période, le pêcheur attrape 1 poisson avec probabilité $1/4$ ou aucun poisson, ainsi la variable aléatoire U suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/4$.

(b) Les 3 heures du concours sont modélisées en 9 périodes de 20 minutes pendant lesquelles le pêcheur attrape 0 ou 1 poisson selon la loi de U et de manière indépendante d'une période à l'autre. Ainsi la variable aléatoire V est une addition de 9 répétitions indépendantes d'une même loi de Bernoulli de paramètre $1/4$,

donc la variable aléatoire V suit une loi binomiale de paramètres 9 et $1/4$.

(c) Comme V suit une loi binomiale de paramètre 9 et $1/4$,

$$P(V=0) = \binom{9}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(1-\frac{1}{4}\right)^{9-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^9.$$

Ainsi la probabilité que le pêcheur finisse bredouille est $P(V=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^9$.

14. (a) Pour une loi de Poisson, $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P([X=k]) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ et $E(X) = V(X) = \lambda$.

(b) Pour que $E(V) = E(X)$ avec $E(X) = \lambda$ et, en tant que loi binomiale, $E(V) = 9 \times \frac{1}{4}$.

Ainsi il faut choisir $\lambda = \frac{9}{4}$.

(c) Comme X suit une loi de Poisson de paramètre λ,

$$P([X=0]) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = e^{-9/4}.$$

Ainsi la probabilité que le pêcheur finisse bredouille est $P(X=0) = e^{-9/4}$.

15. (a) Comme X et Y prennent des valeurs entières positives, $\boxed{[X+Y=15]=\bigcup_{k=0}^{15}\big([X=k]\cap[Y=15-k]\big).}$

(b)

$$\begin{aligned}
P([X+Y=15]) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{15} P\big([X=k]\cap[Y=15-k]\big)\right) \quad \text{d'après la question précédente}\\
&= \sum_{k=0}^{15} P\big([X=k]\cap[Y=15-k]\big) \quad \text{par incompatibilité}\\
&= \sum_{k=0}^{15} P([X=k])P([Y=15-k]) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y\\
&= \sum_{k=0}^{15} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\times\frac{\mu^{15-k}}{(15-k)!}e^{-\mu}\\
&= \sum_{k=0}^{15} \frac{1}{k!(15-k)!}\lambda^k\mu^{15-k}e^{-\lambda}e^{-\mu}\\
&= \sum_{k=0}^{15} \frac{1}{15!}\times\frac{15!}{k!(15-k)!}\lambda^k\mu^{15-k}e^{-\lambda-\mu}\\
&= \frac{1}{15!}\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\lambda^k\mu^{15-k}e^{-\lambda-\mu}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi } P([X+Y=15])=\frac{1}{15!}\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\lambda^k\mu^{15-k}e^{-\lambda-\mu}.}$

(c)

$$\begin{aligned}
P([X+Y=15]) &= \frac{1}{15!}\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\lambda^k\mu^{15-k}e^{-\lambda-\mu}\\
&= \frac{1}{15!}\left(\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\lambda^k\mu^{15-k}\right)e^{-\lambda-\mu}\\
&= \frac{(\lambda+\mu)^{15}}{15!}e^{-(\lambda+\mu)}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } P([X+Y=15])=\frac{(\lambda+\mu)^{15}}{15!}e^{-(\lambda+\mu)}.}$

(d)

$$\begin{aligned}
P_{[X+Y=15]}([X=k]) &= \frac{P\big([X=k]\cap[X+Y=15]\big)}{P([X+Y=15])} \quad \text{par définition}\\
&= \frac{P\big([X=k]\cap[Y=15-k]\big)}{P([X+Y=15])}\\
&= \frac{P([X=k])P([Y=15-k])}{P([X+Y=15])}\\
&= \frac{\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\times\dfrac{\mu^{15-k}}{(15-k)!}e^{-\mu}}{\dfrac{(\lambda+\mu)^{15}}{15!}e^{-(\lambda+\mu)}}\\
&= \frac{15!}{k!(15-k)!}\times\frac{\lambda^k\mu^{15-k}}{(\lambda+\mu)^{15}}\times\frac{e^{-\lambda}e^{-\mu}}{e^{-(\lambda+\mu)}}\\
&= \binom{15}{k}\times\frac{\lambda^k}{(\lambda+\mu)^k}\times\frac{\mu^{15-k}}{(\lambda+\mu)^{15-k}}\\
&= \binom{15}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{15-k}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall k \in [\![0\,;\,15]\!]$, $\quad P_{[X+Y=15]}([X=k]) = \binom{15}{k}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{15-k}$.

(e) En remarquant que $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}=1$, reconnaître la loi de Z.

Comme $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}=\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu}=1$, Z suit une loi binomiale de paramètres 15 et $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

(f)

$$\begin{aligned}
P_{[X+Y=15]}([X\geqslant Y]) &= P_{[X+Y=15]}([X\geqslant 15-X])\\
&= P_{[X+Y=15]}([2X\geqslant 15])\\
&= P_{[X+Y=15]}\left(\left[X\geqslant\frac{15}{2}\right]\right)\\
&= P_{[X+Y=15]}([X\geqslant 8]) \quad \text{car } X \text{ prend des valeurs entières}
\end{aligned}$$

$$P_{[X+Y=15]}([X\geqslant 8]) = \sum_{k=8}^{15} P_{[X+Y=15]}(X=k) = \sum_{k=8}^{15}\binom{15}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{15-k} = P(Z\geqslant 8).$$

Donc la probabilité que le pêcheur ait battu son rival est $\displaystyle\sum_{k=8}^{15}\binom{15}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{15-k}$.

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles. Elle permet aussi de faire le lien entre les différentes questions d'un même exercice et d'éviter de se lancer dans une méthode systématique face à certaines questions, comme «faire un pivot de Gauss pour prouver l'inversibilité d'une matrice»
- Une copie soignée est appréciée. Les résultats doivent être mis en évidence en étant encadrés ou soulignés. Des brouillons sont à la disposition des candidats, il est indispensable de s'en servir et de distinguer la copie et la feuille de brouillon.
  Les ratures brouillonnes sont à éviter absolument, il est préférable de reprendre un calcul mal engagé plutôt que de raturer ou effacer ou écrire pardessus certaines parties de calculs, rendant ainsi l'ensemble illisible.
  Il est à noter que cette année, de nombreuses copies étaient particulièrement mal présentées.
- Un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière. Cette année, dans trop de copies, la numérotation des questions n'est pas respectée. Il est alors très difficile de savoir à quelle question le candidat tente de répondre.
  Un certain nombre de candidats "naviguent" dans le sujet et passent sans précaution d'un exercice à un autre, avec des retours en arrière incessants qui rendent la lecture difficile.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques. Lors de la correction des copies de cette épreuve, une substitution du signe d'égalité «$=$» par le symbole équivalence «$\Longleftrightarrow$» indique une réelle incompréhension de ces symboles.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Des incohérences dans les résultats sont apparus et n'ont clairement entraîné aucune réaction de la part des candidats. Ceux qui indiquent que leur résultat est incohérent sont récompensés.
- Les calculs posent de nombreux problèmes à l'ensemble des candidats. L'écriture des parenthèses est trop souvent optionnelle. Son absence engendre en général de grosses erreurs. D'autre part, des erreurs témoignent de la difficulté à comprendre l'énoncé rencontrée par de nombreux candidats, qui relève d'une mauvaise assimilation du vocabulaire mathématique, mais aussi d'un manque de maîtrise de la langue française.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, très peu de candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,2 et un écart-type de 4,81, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice étudie trois suites définies par récurrence en introduisant une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Pour cette étude, une réduction de la matrice permettra d'en déterminer ses puissances.

1. (a) Cette question simple abordée par quasiment tous les candidats a cependant posé de gros problèmes. Le coefficient multiplicateur $\dfrac{1}{4}$ est très souvent omis ou mis en facteur de $4A - I$.
   Les candidats sont invités à détailler leurs calculs pour éviter toute erreur.
   (b) Cette question demandait d'abord d'expliciter $2M + I$ avant de donner l'expression de son carré puis de son cube.
   Les mêmes erreurs que celles indiquées à la question précédentes se retrouvent ici. Le calcul matriciel n'est pas toujours maîtrisé.
   Une mauvaise lecture de l'énoncé consistant à remplacer $2M + I$ par $2M - I$ a fortement pénaliser certains candidats. Notons qu'alors le résultat devient compliqué à prouver. Ainsi toute malhonnêteté de la part de ces candidats est fortement pénalisée.
   Des confusions entre $(2M + I)^3$, $3(2M + I)$ et $(2M)^3 + I^3$ apparaissent trop souvent. Certains candidats se "perdent" dans le calcul en développant $(2M+I)^3$ puis en calculant M^2, M^3..etc
   (c) Cette question découlait directement de la question précédente. Il est dommage et pas dans l'esprit de l'exercice de calculer M^3, M^2, ... Cette méthode est tout à fait possible et n'a nullement été pénalisée, mais elle est bien longue et trop de candidats l'ayant choisi n'ont pas abouti.
   (d) Cette question en général bien abordée a présenté des résolutions assez extravagantes dues à une méconnaissance du cours : des définitions surprenantes d'une matrice inversible : «une matrice dont les coefficients diagonaux sont non nuls», «une matrice M telle que $MI = IM = M$» ou encore «une matrice M telle que $M = I$».
   La méthode du pivot de Gauss est tout à fait possible ici, cependant ce n'est pas un attendu de l'exercice. Cette méthode est longue à nouveau et révèle un manque de recul par rapport au sujet et une approche trop systématique des questions posées.
2. Cette question très classique est en général bien traitée, mais certains candidats se lancent dans une récurrence pour prouver cette relation de récurrence. Pour d'autres la notation X_{n+1} n'est pas comprise: $X_{n+1} = X_n.\ X$ ou encore $X_{n+1} = X_n \cdot X_n$.
3. (a) Cette question est abordée par quasiment tous les candidats même les plus faible et en général bien traitée.

(b) Cette question est en fait une conséquence immédiate de la question 1d. À nouveau trop de candidats se précipitent dans un pivot de Gauss sans analyser le sujet, ils perdent beaucoup de temps !
Certains candidats pensent prouver que $I - A$ est inversible en prouvant que $I - A = 0$ ou que $I - A = A - I$, ou que A et I sont inversibles.

(c) Cette question de synthèse est peu traitée.
Il est possible de ne traiter qu'une partie de la question en prouvant que C est une solution en précisant bien que l'unicité est admise.
La résolution d'un système est tout à fait possible, mais à nouveau demande beaucoup de temps.

4. La récurrence est bien rédigée en général.
L'initialisation doit se faire ici pour $n = 0$ et non $n = 1$. Des confusions apparaissent : $X_0 = I$ ou $X_0 = 0$ ou $A^0 = 1$ L'hérédité est trop souvent bâclée : les matrices B et C disparaissent par magie, le non respect des priorités conduit de nombreux candidats à confondre $A(X_n - C)$ et $AX_n - C$, d'autres confondent indices et exposant : $X_{n+1} = X_n \cdot X$.

5. (a) À nouveau cette question ne nécessitait pas trop de calculs, l'égalité est une nouvelle formulation de la question 1b. Détailler les calculs entraînait encore une grande perte de temps.
Le terme de polynôme annulateur est attendu ainsi qu'une expression explicite de ce dernier. Rappelons que $P(A)$ est une matrice et non un polynôme. «$P(A) = (2A - I)^3$ ».
Le lien entre racines du polynôme et valeurs propres est rarement clair, il est attendu.
La recherche des racines de $(2x - 1)^3$ ne nécessite pas de développer ce polynôme.

(b) i. Cette question est peu abordée.
Trop peu de candidats pensent à rappeler ce qu'est une matrice diagonalisable.

ii. Cette question facile n'est pas toujours bien abordée : le produit matriciel n'est pas commutatif ainsi «$\frac{1}{2}I = R^{-1}AR = AR^{-1}R = A$ » n'est pas valable.

iii. Quelques rares candidats se sont lancés dans cette question et en général avec succès et rigueur.

6. (a) Cette question porte sur un calcul matriciel, elle a été abordée par quasiment tous les candidats. Cependant la fraction $\frac{12}{6}$ n'est pas toujours simplifiée. Le facteur $\frac{1}{6}$ disparaît parfois en cours de route ...

(b) En général cette question est bien réussie. Cependant des difficultés à gérer le coefficient 2 sont souvent apparue. Beaucoup ont obtenu l'inverse suivant faux $P^{-1} = \frac{1}{2}PQ$.

(c) Cette question portait sur un calcul matriciel en général bien mené, mais aussi souvent mal présenté.

(d) Le raisonnement par récurrence est en général bien rédigé. Cependant dans l'étape d'hérédité, il est indispensable de bien gérer le coefficient et le produit QP : certains candidats remplacent QP par I au lieu de $2I$ et font semblant de ne pas voir qu'il y a un problème en écrivant que $\frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2^{n+2}}$.

(e) Pour cette question plusieurs méthodes étaient possibles: récurrence ou écriture de T sous la forme de $I + N$ où N est une matrice telle que $N^3 = 0$. Mais il n'est pas possible

d'utiliser la suite de l'énoncé c'est-à-dire de se servir de l'expression de A^n qui suit.
De même il n'est pas demander de prouver l'expression donnée dans l'énoncé de A^n.
Une attention plus important à la lecture de l'énoncé aurait permis d'éviter de telles méprises.
Rappelons que $(T^n)_{i,j}$ est en général différent de $(T_{i,j})^n$.

7. Cette question de synthèse est peu abordée. Elle pouvait cependant être traitée en admettant des résultats des questions précédentes. Certains candidats ont pu faire preuve de malhonnêteté afin de se conformer aux expressions données.
8. (a) En général seule la première égalité est abordée et certains montrent de sérieuses lacunes dans leur connaissance des propriétés du logarithme.
La plupart des justifications observées concernant les limites demandées évoquent les résultats de croissances comparées sans entrer dans les détails qui étaient ici clairement attendus.
(b) Cette question est peu abordée. Certains candidats trouvent les bonnes valeurs en considérant comme «naturel » le résultat de la question (a).

Exercice 2

La première partie de cet exercice porte sur l'étude de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{4}{1+e^x}$. Dans la deuxième partie, la réciproque de cette fonction est mise en évidence. Enfin dans la troisième partie une variable aléatoire de densité, une densité proportionelle à f est introduite, puis simuler informatiquement.

Partie 1

1. (a) Un calcul de limite classique, mais parfois fort surprenant : les résultats les plus souvent rencontrés sont 0, $-\infty$ ou $+\infty$. Quand la limite obtenue est 0 ou 4, l'asymptote n'existe pas toujours ou son équation peut être $x = 0$ ou $x = 4$.
(b) Comme à la question précédente, l'interprétation géométrique des limites semble souvent être effectuée au petit bonheur, avec une asymptote verticale au (a) puis horizontale en (b), par exemple.
2. (a) En général la dérivée est correcte. Cependant beaucoup d'oublis du signe $-$: pour ces candidats, la dérivée de $\dfrac{1}{v}$ est $\dfrac{v'}{v^2}$.
Le signe de f' est trop souvent celui de x. Certains résolvent $1 + e^x = 0$ et trouvent $x = \ln 1 = 0$.
(b) La valeur de $f(0)$ est en général correcte.
Par contre le tableau de variation est trop souvent incohérent en lui même : une fonction croissante de 4 à 2 ou avec les résultats précédents obtenus par le candidat.
(c) Cette question est moyennement abordée et pas toujours en cohérence avec les résultats précédents. Beaucoup de candidats se lancent dans le calcul de $f(x) - 4$, puis ne savent plus quoi faire ou se trompent dans l'étude de signe.
(d) En général l'expression générale de la tangente est correcte, mais l'application numérique est parfois incertaine.

3. (a) Dans cette question l'expression de $f''(x)$ est donnée ainsi il a souvent été rencontré des calculs proches du truandage pour aboutir au résultat de l'énoncé. Bien que la formule de la dérivée d'un quotient en général correcte, son application est assez hasardeuse. A nouveau toute malhonnêteté est sanctionnée.
L'erreur suivante a été très souvent rencontrée $\mathrm{e}^{x^2} = (\mathrm{e}^x)^2$.
   (b) Cette question est souvent abordée et en général bien traitée, mais pas toujours assez détaillée.
L'étude de signe est souvent approximative ou laborieuse. Certains pensent que $(1+e^x)^3$ peut être négatif ; d'autres se contentent de résoudre l'équation $e^x - 1 = 0$ mais ne cherchent pas le signe.
L'existence du point d'inflexion par annulation et changement de signe de $f''(x)$ est rarement évoqué clairement.
   (c) Cette question est peu abordée.
Des réponses parfois farfelues : «La position de la tangente est tangente» ou «La position de la tangente est 0 en 0».
La notion de position de la courbe par rapport à une droite semble assez peu comprise. Certains étudient les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses plutôt que de $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.
4. Cette question est trop peu traitée. Elle devrait pourtant l'être. De telles questions sur l'allure d'une courbe et la représentation de quelques droites remarquables sont très importantes. Les futurs candidats sont invités à travailler dessus.
Pour beaucoup la tangente en 0 doit être horizontale même quand l'équation trouvée est correcte et son tracé tout aussi correcte.
Il est important qu'un tel tracé soit en cohérence avec le tableau de variation donné précédemment.
Peu de soin est apporté au tracé de la courbe, des asymptotes et de la tangente.
5. (a) Ce calcul est en général bien mené.
Trop souvent la rédaction laisse apparaître la définition de $f(x)$ comme étant $\dfrac{4e^{-x}}{1+e^{-x}}$ dès le début des calculs. Cette maladresse d'écriture n'est cependant pas formellement sanctionnée.
   (b) Cette question est peu abordée.
Il est peu apparu aux candidats que cette question se servait de la question précédente. Dans les primitives souvent rencontrées, le signe pose problème, $x \mapsto 4\ln(1+e^{-x})$ ou $x \mapsto 4\ln(1+e^x)$.

Partie 2

6. (a) Il apparaît clairement lors de la correction que la lecture de cette question a été trop rapide. Beaucoup pensent que l'intervalle de départ est $]0,4[$. Certains pensent qu'il faut prouver la bijectivité de g. Peu de candidats pensent à rédiger la continuité et la stricte monotonie.
   (b) i. Le calcul souvent bien mené.
      ii. Quelques rares candidats reconnaissent une réciproque.
Certains parlent de fonction «inverse» ou d'«antécédent».

(c) Cette question est peu traitée.
Plusieurs méthodes étaient possibles ici dont une résolutions directes des inéquations.

7. (a) Cette question est peu traitée.
De rares candidats ont pensé à écrire une intégrale, mais aucun n'a su indiquer les bornes correctes.
(b) Cette question est très peu traitée.

Partie 3

8. (a) Les résolutions proposées pour cette question sont un peu décevantes. Peu des candidats s'y sont vraiment engagés.
Trop souvent l'intégrale impropre est égale à l'intégrale bornée de 0 à A.
Le lien avec la question 5 de la partie 1 est rarement fait. La primitive choisie est souvent incorrecte et le calcul final de convergence mène à une arnaque ; par exemple $\ln(1+e^A)$ tend vers 0 en $+\infty$ ... ou bien $0 - 4\ln 2 = 4\ln 2$.
(b) Beaucoup de candidats n'ont pas compris qu'il s'agissait, en grande partie, d'une question «classique» de densité.
Si la continuité et positivité sont très souvent bien rappelées, le fait que l'intégrale sur $\mathbf{R}$ doit converger et de valeur 1 est parfois remplacée par une fonction convergente et de valeur 1.
Très peu de candidats trouvent la valeur demandée de α, peut-être perturbés par la forme de la question («il existe »).
De nombreux candidats tentent de montrer qu'une intégrale impropre converge et vaut 1, sans être bien sûrs s'il s'agit de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha h(t)\, \mathrm{d}t$ ou de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, \mathrm{d}t$.
(c) Une question de cours où parfois la densité est donnée ou mélangée avec la fonction de répartition.
La fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a, b]$ n'était pas attendue ici.
(d) Cette question est peu traitée.
Quelques tentatives par recherche de limites.
(e) Cette question est peu traitée.
(f) Cette question est peu traitée.
Certains reprennent le résultat de la question précédente, mais sans justifier.
(g) Cette question est peu traitée.
De rares tentatives très maladroites qui ne répondent pas à la question.
(h) Cette question est peu traitée et non comprise par les candidats.

Exercice 3

Cet exercice de probabilités discrètes commence par l'étude de trois suites utilisées pour déterminer les probabilités des événements élémentaires liés à l'expérience. Une dernière partie comporte des premières questions tout à fait abordables sur le SQL et se terminant par une question plus délicate permettant aux meilleurs candidats de se révéler.

Partie 1

1. Une récurrence en général bien rédigée et bien menée.
   À noter cependant des erreurs commises par une mauvaise compréhension de la notation en indice confondue avec l'exposant. Et aussi certains marquant l'indice $n+1$ sur la même ligne que a ne savent rapidement plus s'il s'agit de $a_n + 1$ ou de a_{n+1}.
   De nombreuses équivalences à la place des égalités.
   Trop de candidats rédigent l'hérédité en considérant comme acquis le résultat, pour aboutir à l'égalité $1 = 1$, qui leur permet de conclure ...
2. Cette question est en général bien traitée.
3. (a) Cette question est en général plutôt bien traitée, même si les calculs sont bien longs et parfois très mal présentés.
   Quelques tentatives d'arnaque dans la factorisation finale (erreur de coefficient ou de signe).
   (b) Cette question est en général bien traitée.
   Quelques erreurs fréquentes sont cependant à noter : $-\left(-\dfrac{1}{11}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{11}\right)^{n-1}$ ou $y_n = y_1 \times q^n$. Certains ne trouvent pas la valeur de y_1.
4. (a) Cette question est un peu moins bien traitée que la 3.(a): le résultat n'étant pas donné, la raison de la suite est parfois incorrecte.
   (b) Cette question est bien traitée en cohérence avec la question précédente quand elle est traitée.
5. (a) Beaucoup partent de l'égalité $b_n = \dfrac{1}{3}(x_n + y_n)$ pour aboutir à $b_n = b_n$ et conclure que l'égalité de départ est correcte. C'est fâcheux ...
   (b) Cette question étonnamment peu traitée.
   (c) Cette question est peu traitée.
6. Trop peu de candidats prennent soin de préciser que $-1 < -\dfrac{1}{11} < 1$.

Partie 2

7. Cette question est abordée par tous les candidats. Mais la valeur de 8 du dénominateur n'est pas toujours justifiée.
8. (a) De très nombreux candidats confondent $P_{G_1}(G_2)$ et $P(G_1 \cap G_2)$.
   (b) Cette question est souvent abordée mais traitée de manière inégale.
   La formule des probabilités totales ne permet pas d'écrire l'égalité suivante qui est fausse «$P(G_2) = P_{G_1}(G_2) + P_{T_1}(G_2)$ ».
   Pour obtenir cette égalité : «$P(G_2) = P((G_1 \cap G_2) \cup (T_1 \cap G_2))$ » une justification rapide de l'étude d'événement est attendue.
9. Cette question est parfois bien traitée (y compris avec les valeurs fausses trouvées précédemment) mais la confusion entre probabilité conditionnelle et probabilité d'intersection est ici encore fréquente.
10. (a) Soit la question est très bien traitée soit des calculs étranges apparaissent. Les mêmes confusions qu'à la question 8 entre la probabilité conditionnelle et la probabilité de l'intersection sont souvent rencontrées.

(b) Une grande confusion entre les événements et les probabilités.
Des intersections de probabilités sont trop souvent rencontrées.
La formule des probabilités totales est trop souvent incorrecte. Le système complet d'événements utilisé doit clairement être indiqué.

(c) Quand elle est abordée cette question est bien traitée.

11. Cette question est peu abordée.

Partie 3

12. Il est dommage que ces questions de SQL soient aussi peu traitées.
    (a) Quand cette question est abordée, elle est bien traitée.
    (b) Cette question ets peu traitée.
    Certains candidats écrivent un script Python ! Ou bien recopient l'énoncé en modifiant certaines lignes.
    (c) Un grand nombre de candidats ignorant tout de la syntaxe SQL tentent quand même leur chance en recopiant le tableau qui donne le schéma relationnel et en le modifiant de façon à y faire apparaître des éléments de la question posée. Cela pose question sur leur façon d'aborder une composition de mathématiques.
13. (a) Cette question est peu traitée, et parfois de manière assez farfelue: U suit une loi géométrique avec deux paramètres ou même une loi de Poisson comme on dénombre des poissons.
    D'autres reconnaissent une loi binomiale ... mais ne voient pas celle qui suit à la question (b).
    Plusieurs candidats reconnaissent une loi de Bernoulli mais ne précisent pas son paramètre.
    (b) Les quelques bonnes réponses sont souvent lacunaires : l'argumentation précise pour justifier une loi binomiale y est rarement.
    (c) Cette question est peu abordée.
14. (a) Cette question de cours est très décevante.
    (b) Cette question est peu abordée et non comprise.
15. (a) Cette question est peu abordée.
    (b) Cette question est peu abordée.
    (c) Cette question est peu abordée.
    (d) Cette question n'est pas abordée.
    (e) Cette question n'est pas abordée.
    (f) Cette question n'est pas abordée.