2024

ANNALES

Mathématiques Approfondies

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

FILIÈRE ÉCONOMIQUE

ET COMMERCIALE

VOIE ECG

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Deux exercices d'application des connaissances de base.
- Un problème faisant largement appel aux probabilités.

ÉVALUATION

- Les deux exercices sont de valeur sensiblement égale dans le barème.
- La moitié des points sont destinés au problème.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

Exercice 1

1. $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha} \text{ et } \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ sont convergents lorsque } \alpha>1 \text{ et divergent lorsque } \alpha\leqslant 1.}$

2. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   Par décroissance de $t\mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $[n,n+1]$, $\dfrac{1}{t^2}\leqslant\dfrac{1}{n^2}$, donc par croissance de l'intégrale (dont les bornes sont ordonnées par ordre croissant) : $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{n^2}$.
   De même, par décroissance de $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$ sur $[n-1,n]$, $\displaystyle\frac{1}{n^2}\leqslant\int_{n-1}^n\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$. $\boxed{\text{Donc } \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leqslant\frac{1}{n^2}\leqslant\int_{n-1}^n\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.}$

   (b) Soit N un entier naturel non nul.
   Soit M un entier naturel supérieur ou égal à $N+1$.
   En sommant les inégalités précédentes pour n allant de $N+1$ à M : $\displaystyle\int_{N+1}^{M+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leqslant\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n^2}\leqslant\int_N^M\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$,
   soit $\displaystyle\frac{1}{N+1}-\frac{1}{M+1}\leqslant\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{N}\leqslant\frac{1}{M}$.
   En faisant tendre M vers $+\infty$: $\boxed{\dfrac{1}{N+1}\leqslant R_N\leqslant\dfrac{1}{N}.}$

3. Pour tout entier naturel N non nul, $S-S_N=R_N$.
   D'après la question précédente, $|S_n-S|\leqslant\dfrac{1}{N}$.
   En posant $N_0=10^3$, $\forall N\geqslant N_0$, $\dfrac{1}{N}\leqslant\dfrac{1}{N_0}\leqslant 10^{-3}$.
   $\boxed{\text{Donc } \forall N\geqslant 10^3,\ |S-S_N|=R_N\leqslant 10^{-3}.}$

4. (a) Soit N un entier naturel non nul.
   $T_N-S=\dfrac{1}{N+1}+S_N-S=\dfrac{1}{N+1}-R_N$, D'après la question 2b, $\dfrac{1}{N+1}-\dfrac{1}{N}\leqslant\dfrac{1}{N+1}-R_N\leqslant 0$.
   Or $\dfrac{1}{N}-\dfrac{1}{N+1}=\dfrac{1}{N(N+1)}$ et $\dfrac{1}{N(N+1)}\leqslant\dfrac{1}{N^2}$..
   $\boxed{\text{Donc } \mid S-T_N\mid\leqslant\dfrac{1}{N^2}.}$

   (b) Posons $N_1=32$. Alors $N_1^2\geqslant 10^3$ et $\forall N\geqslant N_1$, $\dfrac{1}{N^2}\leqslant 10^{-3}$.
   $\boxed{\text{Ainsi, si } N\geqslant 32,\ \mid S-T_N\mid\leqslant 10^{-3}.}$

5. (a) $u_n(p)$ est le produit de $p+1$ facteurs équivalents à n.

$\boxed{\text{Donc } u_n(p) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{p+1}}.}$

(b) La série $\sum \dfrac{1}{n^{p+1}}$ est à termes positifs et convergente car $p+1>1$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum u_n(p) \text{ converge.}}$

6. (a) Soit n un entier naturel non nul.

$u_n(1) = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(1) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}}$

(b) Pour tout entier naturel N non nul, par sommation télescopique, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n(1) = 1 - \frac{1}{N+1}$.

En faisant tendre N vers $+\infty$, $\boxed{U_n(1) = 1.}$

7. (a) Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) &= \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)} \\
&= \frac{n+p}{n(n+1)\cdots(n+p-1)(n+p)} - \frac{n}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)} \\
&= \frac{p}{n(n+1)\cdots(n+p-1)(n+p)} \\
&= p u_n(p).
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi } \forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } p \geqslant 2,\ u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) = p u_n(p).}$

(b) Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
En sommant l'égalité obtenue à la question précédente pour n allant de 1 à N :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n(p) &= \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{N}(u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1)) \\
&= \frac{u_1(p-1)}{p} - \frac{u_{N+1}(p-1)}{p} \\
&= \frac{1}{p\cdot p!} - \frac{u_{N+1}(p-1)}{p}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{N\to+\infty} u_{N+1}(p-1) = 0$. $\boxed{U(p) = \dfrac{1}{pp!}.}$

8. (a) **Initialisation** pour $p=1$, soit n un entier naturel non nul.

$$\frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k) = \frac{1}{n^2(n+1)} + u_n(1) = \frac{1}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2}$$

Hérédité Soit p un entier naturel non nul.

Supposons que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{p!}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$.

$$\begin{aligned}
&\frac{(p+1)!}{n^2(n+1)\dots(n+p+1)} + \sum_{k=1}^{p+1}(k-1)!u_n(k) \\
&= \frac{(p+1)!}{n^2(n+1)\dots(n+p+1)} + p!u_n(p+1) + \sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k) \\
&\underset{\substack{\text{Par hypothèse} \\ \text{de récurrence}}}{=} \frac{(p+1)!}{n^2(n+1)\dots(n+p+1)} + \frac{p!}{n(n+1)\dots(n+p+1)} + \frac{1}{n^2} - \frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \\
&= \frac{1}{n^2} + \frac{(p+1)! + np! - (n+p+1)p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \\
&= \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{p!}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$.

(b) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, et pour tout entier naturel k non nul, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n(k)$ converge.

Donc par linéarité la série de terme général $\dfrac{p!}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$ converge et

$$\begin{aligned}
S &= p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p}(k-1)!U(k) \\
&= p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p}(k-1)! \times \frac{1}{k\cdot k!} \\
&= p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}$ converge et $S = p!\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}$.

9. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier naturel n supérieure ou égal à $N+1$, par décroissance de $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{p+2}}$ sur $[n-1, n]$ et sur $[n, n+1]$, $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{p+2}} \leqslant \frac{1}{n^{p+2}} \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^{p+2}}$.

En sommant de $N+1$ à $+\infty$, $\dfrac{1}{p+1} \times \dfrac{1}{(N+1)^{p+1}} \leqslant \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+2}} \leqslant \frac{1}{p+1} \times \frac{1}{N^{p+1}}$.

Or, $\forall n \geqslant N+1,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} \leqslant \dfrac{1}{n^{p+2}}$.

Par croissance de la somme de séries convergentes, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+2}}$.

Ainsi $\forall (N,p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \leqslant \frac{1}{p+1}.\frac{1}{N^{p+1}}$.

10. En appliquant ce qui précède pour $p=3$: $S = U_N + 6 \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}$.

 Alors $S - U_N = 6 \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}$.

 Ainsi, d'après la question précédente $\mid S - U_N \mid \leqslant \dfrac{6}{4N^4}$.

 Or $7^4 = (50-1)2 = 2500 + 1 - 100$ donc $1500 < 7^4$, donc pour $N \geqslant 7$: $\mid S - U_N \mid \leqslant 10^{-3}$.

11. On voit que la quantité $\mid S - U_N \mid$ décroît bien plus vite que la quantité $\mid S - T_N \mid$, qui décroît elle même bien plus vite que $\mid S - S_N \mid$.

 Plus précisément, on peut lire une pente d'environ -4 pour la première, ce correspond à une erreur de l'ordre de 10^{-4}, de -2 pour la deuxième, ce qui correspond à une erreur de l'ordre de 10^{-2}, et de l'ordre 10^{-2} pour la dernière. Tout ceci est cohérent avec les vitesses trouvées précédemment.

 Enfin, on peut retrouver par lecture graphique les valeurs N_0 précédentes : s'il est difficile de donner une valeur exacte sur ce graphique, les valeurs trouvées correspondent à ce que l'on peut lire sur le graphique.

Exercice 2

Partie 1

1. (a) Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[x]$, soit λ et μ deux réels.

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda P + \mu Q) &= \big((\lambda P + \mu Q)(x_0), \dots, (\lambda P + \mu Q)(x_n)\big) \\
&= \big(\lambda P(x_0) + \mu Q(x_0), \dots, \lambda P(x_n) + \mu Q(x_n)\big) \\
&= \lambda\big(P(x_0), \dots, P(x_n)\big) + \mu\big(Q(x_0, \dots, Q(x_n)\big) \\
&= \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q).
\end{aligned}$$

 Ainsi, Φ est une application linéaire.

 Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$. Supposons que $\Phi(P) = \Phi(Q)$. Ainsi, P et Q coïncident en les $n+1$ points distincts $x_0, \dots, x_n$, et sont de degré au plus $n+1$. Donc $P = Q$.

 Ainsi Φ est une application linéaire injective.

 (b) Comme $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, et comme Φ est une application linéaire injective, Φ est bijective.

 Ainsi, pour tout $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\Phi(P) = (y_0, \dots, y_n)$.

2. Soit i un entier naturel compris entre 0 et n.
D'après la question précédent pour le $n+1$-uplet $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, ce 1 ce trouvant sur l'indice i il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ noté L_i tel que $L_i(x_i)=1$ et $\forall j\neq i$, $L_i(x_j)=0$.

Ainsi pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, il existe un unique $L_i\in\mathbb{R}[x]$ vérifiant $\forall j\in[\![0,n]\!]$, $L_i(x_j)=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$.

3. Remarquons que L_0 est un polynôme de degré au plus 3 dont 1, 2 et 3 sont racines.
Donc il existe une constante C telle que $L_0(x)=C(X-1)(X-2)(X-3)$. Or $L_0(-1)=1$.
Donc $C=\dfrac{-1}{24}$.

Ainsi $L_0(x)=-\dfrac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)=\dfrac{-1}{24}x^3+\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{11}{24}x+4$.

De même $L_1(x)=\dfrac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-3)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$,

et $L_2(x)=-\dfrac{1}{3}(x+1)(x-1)(x-3)=\dfrac{-1}{3}x^3+x^2+\dfrac{1}{3}x-1$

et $L_3(x)=\dfrac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-2)=\dfrac{1}{8}x^3-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{4}$.

4. Remarquons que $\dfrac{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}$ est un polynôme de degré n dont x_j est racine quand $j\neq i$ et qui vaut 1 en x_i.

Donc d'après l'unicité prouvée à la question 2, $L_i(x)=\dfrac{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}$.

Et L_i est de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}$.

5. **Symétrie** Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.
$$\langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^{n}P(x_k)Q(x_k)=\sum_{k=0}^{n}Q(x_k)P(x_k)=\langle Q,P\rangle.$$
Bilinéarité Soit P, Q et R des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit λ un réel.
$$\begin{aligned}\langle P,(Q+\lambda R)\rangle &= \sum_{k=0}^{n}P(x_k)(Q+\lambda R)(x_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}P(x_k)Q(x_k)+\lambda\sum_{k=0}^{n}P(x_k)R(x_k)\\ &= \langle P,Q\rangle+\lambda\langle P,R\rangle\end{aligned}$$

Donc $\langle\ ,\ \rangle$ est linéaire par rapport à la deuxième variable, et par symétrie bilinéaire.

Positivité Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Alors $\langle P, P\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^2(x_k)$.

Comme somme de termes positifs, $\langle P, P\rangle \geqslant 0$.

Définie-positive Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Supposons $\langle P, P\rangle = 0$.

Or $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $0 \leqslant P^2(x_k) \leqslant \sum_{i=0}^{n} P^2(x_i)$. Donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P^2(x_k) = 0$ ou encore $P(x_k) = 0$.

Ainsi, P est de degré au plus n et possède $n+1$ racines, donc $P = 0$.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

6. Soit i un entier compris entre 0 et n.

$\|L_i\|^2 = L_i^2(x_i) + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} L_i^2(x_j) = 1 + 0 = 1,$.

Soit j un entier compris entre 0 et n différent de i.

$\langle L_i, L_j\rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k)L_j(x_k) = L_i(x_i)L_j(x_i) + L_i(x_j)L_j(x_j) + \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i \text{ et } k\neq j}} L_i(x_k)L_j(x_k) = 0.$

Donc $\mathscr{L}$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$, donc libre.

Or $\mathscr{L}$ contient $n+1$ éléments et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.

Ainsi, $\mathscr{L}$ est une base orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

7. D'après l'expression d'un vecteur dans une base orthonormée, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle P, L_i\rangle L_i(x)$.

Or, pour tout entier naturel i de 0 à n,

$$\begin{aligned}
\langle P, L_i\rangle &= \sum_{k=0}^{n} P(x_k)L_i(x_k)\\
&= P(x_i)L_i(x_i) + \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n} P(x_k)L_i(x_k)\\
&= P(x_i) + 0.
\end{aligned}$$

Donc $P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i(x)$.

Dit autrement, le $(n+1)$-uplet des coordonnées de P dans $\mathscr{L}$ est $(P(x_0), \ldots, P(x_n))$.

Partie 2

8. (a) $N_0(x) = 1$, $N_1(x) = x+1$, $N_2(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$

et $N_3(x) = (x+1)(x-1)(x-2) - x^3 - 2x - x + 2$.

(b) D'après les deux questions précédentes :

- $(m_{0,0}, m_{1,0}, m_{2,0}, m_{3,0}) = (1,1,1,1)$;
- $(m_{0,1}, m_{1,1}, m_{2,1}, m_{3,1}) = (0,2,3,4)$;
- $(m_{0,2}, m_{1,2}, m_{2,3}, m_{3,2}) = (0,0,3,8)$;
- $(m_{0,3}, m_{1,3}, m_{2,3}, m_{3,3}) = (0,0,0,8)$.

(c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

La matrice M est triangulaire, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi, M est inversible.

Et $M^{-1} = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ 4 & -12 & 8 & 0 \\ -1 & 6 & -8 & 3 \end{pmatrix}$.

9. $\mathscr{N}$ est une famille de polynômes de degré échelonné de cardinal $n+1$.
Donc $\mathscr{N}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

10. (a) D'après la question 7, $N_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} N_0(x_k) L_k$. Or $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $N_0(x_k) = 1$.

Donc $N_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k$.

(b) Soit i un entier naturel compris entre 1 et n.
D'après la question 7, $N_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} N_i(x_k) L_k$. Or $\forall k \in [\![0,i-1]\!]$, $N_i(x_k) = 0$.

Donc $N_i = \displaystyle\sum_{k=i}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) L_k$.

11.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & x_1 - x_0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1}) & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & x_n - x_0 & \cdots (x_n - x_0) & \cdots (x_n - x_{j-1}) & \cdots & (x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est clairement pas orthogonale, car sa première colonne n'est pas de norme 1. Comme $\mathscr{L}$ est orthonormée, Donc $\mathscr{N}$ n'est pas orthonormée.

12. D'après la question 9, $\mathscr{N}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
Ainsi, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_0, \dots, a_n)$ vérifiant $P = a_0 N_0 + \cdots + a_n N_n$.

13. (a)

```
def prodX(X, i, k):
    P = 1
    for j in range(k+1):
        if j != i :
            P = P*(X[i][0] - X[j][0])
    return P
```

(b)

```
import numpy

def coeff(X, Y)
    nPlusUn, _ = X.shape
    A = numpy.zeros((nPlusUn, 1)) # Colonne de 0
    A[0][0] = Y[0][0]
    for k in range(1, nPlusUn):
        for i in range(k+1) :
            A[k][0] = A[k][0] + Y[i][0] / prodX(X, i, k)
    return A
```

(c) L'inverse de A est la matrice de passage de $\mathscr{N}$ à $\mathscr{L}$. Les colonnes de la matrice de passage de $\mathscr{N}$ à $\mathscr{P}$ sont donc les coefficients des vecteurs $L_0, \ldots, L_n$ dans la base $\mathscr{N}$. Ce sont donc les colonnes renvoyées par la fonction `coeff`, appliquée à la colonne X et aux colonnes des vecteurs coordonnées de la base canonique.
La fonction `coeff` est donc appelée $n+1$ fois.

14. (a) Pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, $N_i(x_0) = 0$, donc $P_n(x_0) = a_0 N_0(x_0) = a_0$, et par définition $y_0 = P_n(x_0)$. $\boxed{\text{Ainsi, } a_0 = y_0.}$
De plus, pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, $\deg(N_i) = i$. Par les règles d'addition des polynômes et de degré, $\deg\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k N_k\right) \leqslant n-1$.
Ainsi, P_n a le même coefficient de degré n que $a_n N_n$. Comme N_n est unitaire, ce coefficient vaut a_n.
$\boxed{\text{Ainsi } a_n \text{ est le coefficient de degré } n \text{ de } P_n.}$

(b) Notons $Q_n = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$.
Alors Q_n est un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$.
Et pour tout entier naturel i compris entre 0 et n,

$$Q_n(x_i) = y_i L_i(x_i) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} y_j L_j(x_i) = y_i + 0 = y_i.$$

Ainsi, Q_n est solution du problème d'interpolation de Lagrange, tout comme P_n. Par unicité de la solution de ce problème (question 1b), $\boxed{P_n = y_0 L_0 + \cdots + y_n L_n.}$

(c) Pour tout entier naturel i compris entre 0 et n, le coefficient de degré n de L_i est $\dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}$ (question 4). Donc par linéarité, $\boxed{\text{le coefficient de degré } n \text{ de } P_n \text{ est } a_n = \sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}}$.

15. (a) Pour tout entier naturel i compris entre 0 et k, $\deg(N_i)=i$, donc $N_i \in \mathbb{R}_k[x]$.
Or, $\mathbb{R}_k[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$, et est donc stable par combinaison linéaire. $\boxed{\text{Ainsi, } Q_k \in \mathbb{R}_k[x].}$

(b) Soit i un entier naturel compris entre 0 et k.
Remarquons que pour tout entier naturel j strictement supérieur à k, alors $N_j(x_i)=0$.
Alors,

$$Q_k(x_i) = \sum_{j=0}^{k} a_j N_j(x_i) = \sum_{j=0}^{n} a_j N_j(x_i) = P_n(x_i).$$

Par définition de P_n, $P_n(x_i)=y_i$. $\boxed{\text{Donc } Q_k(x_i)=y_i.}$

(c) Ainsi, Q_k est la solution du problème d'interpolation de Lagrange associé aux points $X_0,\dots,X_k$, tout comme P_k. Par unicité de cette solution (question 1b), $\boxed{P_k = Q_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i N_i.}$

(d) En appliquant le résultat de la question 14c (on ne considère que $X_0,\dots,X_k$, ce qui revient à considérer que $n=k$) $\boxed{a_k = \sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}.}$

Problème

Partie 1

1. • La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}$, comme inverse d'une fonction continue (car polynomiale) ne s'annulant pas.
   • Soit A et B deux réels tels que $A < B$:

$$\begin{aligned}\int_A^B \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_A^B \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\frac{\mathrm{d}x}{a} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_A^B \\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\frac{B}{a}\right)-\frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\frac{A}{a}\right).\end{aligned}$$

   Or $\lim\limits_{A\to+\infty}\mathrm{Arctan}\left(\frac{A}{a}\right)=\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{B\to-\infty}\mathrm{Arctan}\left(\frac{B}{a}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

   Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

   Ainsi, f est une densité de probabilité.

2. F est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ F'(x)=\frac{1}{\pi}.\frac{1}{a}.\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=f(x)$.

   De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$.

   Donc F est la fonction de répartition associé à f.

3. Remarquons que $x\mapsto xf(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $|xf(x)|\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{a}{\pi x}$.

   Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ ne converge pas absolument.

   Ainsi, X n'admet pas d'espérance.

4. $(\Longrightarrow)$ Supposons que X suit une loi de Cauchy standard.
   Alors pour tout réel x, $F_{aX}(x)=P(aX\leqslant x)=P\left(X\leqslant\frac{x}{a}\right)$ car $a>0$.
   Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ F_{aX}(x)=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{2}$. Donc aX suit une loi de Cauchy de paramètre a.

   $(\Longrightarrow)$ Supposons que aX suit une loi de Cauchy de paramètre a.
   Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)=P(X\leqslant x)=P(aX\leqslant ax)=\frac{1}{\pi}\arctan(x)+\frac{1}{2}$.
   Donc X suit une loi de Cauchy standard.

   Ainsi, X suit la loi de Cauchy de paramètre 1 si et seulement si aX suit la loi de Cauchy de paramètre a.

5. (a)

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{(t^2+k^2)\big((x-t)^2+1\big)} &= \frac{\alpha t+\beta}{t^2+k^2} + \frac{\alpha(x-t)+\gamma}{(x-t)^2+1} \\
&= \frac{(\alpha t+\beta)((x-t)^2+1) + (\alpha(x-t)+\gamma)(t^2+k^2)}{(t^2+k^2)((x-t)^2+1)} \\
&= \frac{(\alpha t+\beta)(t^2-2xt+x^2+1) + (\alpha(x-t)+\gamma)(t^2+k^2)}{(t^2+k^2)((x-t)^2+1)} \\
&= \frac{(-\alpha x+\beta+\gamma)t^2 + (\alpha(x^2+1)-2\beta x-\alpha k^2)t + \beta(x^2+1) + (\alpha x+\gamma)k^2}{(t^2+k^2)((x-t)^2+1)}.
\end{aligned}$$

En multipliant cette dernière égalité par $(t^2+k^2)((x-t)^2+1)$,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (-\alpha x+\beta+\gamma)t^2 + (\alpha(x^2+1)-2\beta x-\alpha k^2)t + \beta(x^2+1) + (\alpha x+\gamma)k^2 = 1.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme,

- $(-\alpha x+\beta+\gamma) = 0$, donc $\boxed{\beta+\gamma = \alpha x}$;
- $\alpha(x^2+1) - 2\beta x - \alpha k^2$, donc $\boxed{\alpha(x^2+1-k^2) = 2\beta x}$;
- $\beta(x^2+1) + (\alpha x+\gamma)k^2 = 1$, donc $\boxed{\beta(x^2+1) + \alpha x k^2 + \gamma k^2 = 1}$.

(b) $k^2 L_1 + L_3$ donne $\beta(k^2+x^2+1) + 2\gamma k^2 + \alpha x k^2 = \alpha x k^2 + 1$.
$\boxed{\beta(k^2+x^2+1) + 2\gamma k^2 = 1.}$
$(x^2+1)L_1 + xL_2 + L_3$ donne $2\beta(x^2+1) + \alpha x(x^2+1-k^2 = k^2) + \gamma(x^2+1+k^2) = \alpha x(x^2+1) + 2\beta x^2 + 1$.
$\boxed{\text{Donc } \beta(x^2+k^2-1) + \gamma(x^2+k^2+1) = 1.}$

(c) $L_1' + kL_2'$ donne

$$\begin{aligned}
k+1 &= \beta(x^2+k^2+1) + 2\gamma k^2 + 2\beta k + \gamma k(x^2+k^2+1) \\
&= \beta(x^2+k^2+2k+1) + \gamma k(x^2+k^2+2k+1) \\
&= \beta(x^2+(k+1)^2) + \gamma k(x^2+(k+1)^2) \\
&= (\beta+\gamma k)(x^2+(k+1)^2).
\end{aligned}$$

Comme $x^2+(k+1)^2 > 0$, $\boxed{\beta+\gamma k = \frac{k+1}{x^2+(k+1)^2}.}$

(d) ◇ La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$, par opérations sur des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Remarquons notamment que $t \mapsto (x-t)^2+1$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

◇ La dérivée de $t \longmapsto \ln(t^2+k^2)$ est $t \longmapsto \dfrac{2t}{t^2+k^2}$.

◇ La dérivée de $t \longmapsto \ln((x-t)^2+1)$ est $t \longmapsto \dfrac{-2(x-t)}{(x-t)^2+1}$.

◇ La dérivée de $t \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{t}{k}\right)$ est $t \longmapsto \dfrac{k}{t^2+k^2}$.

◇ La dérivée de $t \longmapsto \operatorname{Arctan}(t-x)$ est $t \longmapsto \dfrac{1}{(t-x)^2+1}$.

◇ Alors, par linéarité de la dérivation :

$$G'(t) = \frac{\alpha t}{t^2+k^2} + \frac{\alpha(x-t)}{(x-t)^2+1} + \frac{\beta}{t^2+k^2} + \frac{\gamma}{(t-x)^2+1} = \frac{\alpha t+\beta}{t^2+k^2} + \frac{\alpha(x-t)+\gamma}{(x-t)^2+1} = g(t).$$

Ainsi, G est une primitive de g.

6. (a) Remarquons que f est bornée (f est positive et majorée par $\frac{1}{\pi a}$). Or X et Y sont indépendantes. Ainsi, $X+Y$ admet pour densité la fonction φ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\pi(t^2+k^2)} \times \frac{1}{\pi((x-t)^2+1)} \mathrm{d}t = \frac{k}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t.$$

Comme G est une primitive de g, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty} G(t) - \lim_{t\to-\infty} G(t)$.

Ainsi, une densité de $X+Y$ est définie par $\phi(x) = \dfrac{k}{\pi^2}\left(\lim\limits_{t\to+\infty} G(t) - \lim\limits_{t\to-\infty} G(t)\right)$.

(b) Remarquons que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} G(t) = \frac{\beta}{k}\frac{\pi}{2} + \gamma\frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} G(t) = -\frac{\beta}{k}\frac{\pi}{2} - \gamma\frac{\pi}{2}$.
Ainsi, en utilisant le résultat de la question 5c,

$$\varphi(x) = \frac{k}{\pi^2}\left(\pi\frac{\beta}{k} + \gamma\pi\right) = \frac{1}{\pi}(\beta+\gamma k) = \frac{1}{\pi}.\frac{k+1}{x^2+(k+1)^2}.$$

Ainsi, $X+Y$ suit la loi de Cauchy de paramètre $k+1$.

7. **Initialisation** si $k=1$ alors X_1 suit une loi de Cauchy de paramètre a.
Hérédité Soit k un entier naturel non nul. Supposons que si $X_1,\dots,X_k$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Cauchy de paramètre a, alors $X_1+\dots+X_k$ suit la loi de Cauchy de paramètre ka.
Soit $X_1,\dots,X_{k+1}$ des variables aléatoires indépendantes et de même de loi de Cauchy de paramètre a.
Alors par hypothèse de récurrence, $X_1+\dots+X_k$ suit la loi de Cauchy de paramètre ka.
Donc d'après la question 4, $\dfrac{1}{ka}(X_1+\dots+X_k)$ suit la loi de Cauchy de paramètre 1 età nouveau d'après la question 4, $\dfrac{1}{a}(X_1+\dots+X_k)$ suit la loi de Cauchy de paramètre k.
Or $\dfrac{1}{a}X_{k+1}$ suit une loi de Cauchy standard.
Donc d'après la question 7, $\dfrac{1}{a}(X_1+\dots+X_k) + \dfrac{1}{a}X_{k+1}$ suit donc la loi de Cauchy de paramètre $k+1$.
Donc $X_1+\dots+X_{k+1}$ suit la loi de Cauchy de paramètre $(k+1)a$.

Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel k non nul, si $X_1,\dots,X_k$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de Cauchy de paramètre a, alors $X_1+\ldots+X_k$ suit une loi de Cauchy de paramètre ka.

CONCOURS ECRICOME PREPA

Partie 2

8. Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $a > 0$:

$$P(Y \leqslant t) = P\left(\tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right) \leqslant \frac{t}{a}\right).$$

Or, avec probabilité 1, $-\frac{\pi}{2} < U - \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, donc comme tan réalise une bijection strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque Arctan,

$$P(Y \leqslant t) = P\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right) \leqslant \text{Arctan}\left(\frac{t}{a}\right)\right) = P\left(U \leqslant \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{t}{a}\right) + \frac{1}{2}\right).$$

Comme la fonction Arctangente est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{t}{a}\right) + \frac{1}{2} \in]0,1[$, donc

$$P(Y \leqslant t) = \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{t}{a}\right) + \frac{1}{2} = F(t).$$

La fonction de répartition caractérisant la loi d'une variable aléatoire, $\boxed{Y \text{ suit la loi de Cauchy de paramètre } a.}$

9.
```
import numpy.random as rd
import numpy as np

def cauchy(a) :
    return a*np.tan(np.pi*(rd.random() - .5))
```

10.
```
import numpy as np

def realisation(n, a):
    X = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        X[i] = cauchy(a)
    return X
```

Autre possibilité

```
def realisation(n, a):
    return np.array([cauchy(a) for i in range(n)])
```

11.
```
def moyennes(n, a):
    X = realisation(n, a)
    M = np.zeros(n)
    for i in range(n) :
        M[i] = np.mean(X[:i])
    return M
```

Autre version

```python
def moyennes(n, a):
    return np.cumsum(realisation(n, a)) / np.array(range(1, n+1))
```

12. Les moyennes ne semblent pas converger vers une constante : il y a régulièrement de «grands sauts».
Les résultats de la partie précédente assurent en effet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n$ suit la loi de Cauchy de paramètre a. Il semblerait qu'il n'y ait de convergence (en probabilité) vers une constante.
Comme les variables aléatoires X_i n'admettent pas d'espérance, la loi faible des grands nombres ne s'applique pas ici.

Partie 3

13. Y_n est à valeurs dans $\{0,1\}$ donc suit une loi de Bernoulli.
$P(Y_n = 1) = P(|X_n| \leqslant M) = P(-M \leqslant X_N \leqslant M) = P(X_N \leqslant M) - P(X_N < -M) = F(M) - F(-M)$.
Par imparité de la fonction Arctangente,
$$P(Y_n = 1) = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{M}{a}\right).$$
Ainsi, Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{M}{a}\right)$.

14. Par indépendance mutuelle des variables X_n, les variables aléatoires Y_n sont aussi mutuellement indépendantes. Elles sont de même loi, admettent une variance.
Par la loi faible des grands nombres $\overline{Y}_n$ converge en probabilité vers $E[Y_1] = p(a)$.

15. (a) Comme $M > 0$, $0 < \text{Arctan}\left(\frac{M}{a}\right) < \frac{\pi}{2}$, donc $0 < p(a) < 1$.
De plus, le trinôme du second degré $x(1-x)$ a pour racines 0 et 1 et a un coefficient dominant strictement négatif, donc atteint son maximum en $x = \frac{1}{2}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
Ainsi, $p(a)(1-p(a)) \leqslant \frac{1}{4}$.
(b) Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \text{e}^{-t^2/2}\text{d}t$.
Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{e}^{-t^2/2}$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi'(t) > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\Phi(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

Ainsi, Φ est strictement croissante, continue sur $\mathbb{R}$, tend vers 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Φ réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
Il existe donc un unique $z \in \mathbb{R}$ vérifiant $\Phi(z) = 0,975$.
Comme $\Phi(0) = \dfrac{1}{2} < 0,975$ et comme Φ est strictement croissante, on a $z > 0$.

Ainsi, il existe un unique $z \in \mathbb{R}$, strictement positif, vérifiant $\Phi(z) = 0,975$.

(c) Les variables aléatoires Y_i ont une variance finie, égale à $p(a)(1-p(a))$ et sont mutuellement indépendantes. On peut donc appliquer le théorème central-limite : en notant

$$Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{Y}_n - p(a)}{\sqrt{p(a)(1-p(a))}}\right),$$

la suite Z_n converge en loi vers la loi normale centrée réduite, ce qui donne notamment que

$$P(-z \leqslant Z_n \leqslant z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(z) - \Phi(-z) = 0,95.$$

Or, $P(-z \leqslant Z_n \leqslant z) = P\left(-\sqrt{p(a)(1-p(a))}\dfrac{z}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{Y}_n - p(a) \leqslant \sqrt{p(a)(1-p(a))}\dfrac{z}{\sqrt{n}}\right)$.
Comme $\sqrt{p(a)(1-p(a))} \leqslant \dfrac{1}{2}$,

$$\left[-\sqrt{p(a)(1-p(a))}\frac{z}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{Y}_n - p(a) \leqslant \sqrt{p(a)(1-p(a))}\frac{z}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[-\frac{z}{2\sqrt{n}} \leqslant \overline{Y}_n - p(a) \leqslant \frac{z}{2\sqrt{n}}\right],$$

donc, par croissance de P,

$$P\left(-\sqrt{p(a)(1-p(a))}\frac{z}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{Y}_n - p(a) \leqslant \sqrt{p(a)(1-p(a))}\frac{z}{\sqrt{n}}\right) \leqslant P\left(-\frac{z}{2\sqrt{n}} \leqslant \overline{Y}_n - p(a) \leqslant \frac{z}{2\sqrt{n}}\right).$$

Or

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{z}{2\sqrt{n}} \leqslant \overline{Y}_n - p(a) \leqslant \frac{z}{2\sqrt{n}}\right) &= P\left(-\frac{\pi z}{4\sqrt{n}} \leqslant \frac{\pi}{2}\overline{Y}_n - \operatorname{Arctan}\left(\frac{M}{a}\right) \leqslant \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{M}{a}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}\overline{Y}_n - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}, \frac{\pi}{2}\overline{Y}_n + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right]\right), \end{aligned}$$

$\left[\dfrac{\pi}{2}\overline{Y}_n - \dfrac{\pi z}{4\sqrt{n}}, \dfrac{\pi}{2}\overline{Y}_n + \dfrac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{M}{a}\right)$.

(d) Vu que $0 < p(a) < 1$ et vu que $\overline{Y}_n$ converge en probabilité vers $p(a)$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left[\frac{\pi}{2}\overline{Y}_n - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}, \frac{\pi}{2}\overline{Y}_n + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = 1.$$

Par croissance stricte de la fonction tangente sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, pour n suffisamment grand, on obtient comme intervalle de confiance pour $\dfrac{M}{a}$:

$$\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y}_n - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right), \tan\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y}_n + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right)\right].$$

Donc $\left[\dfrac{M}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y}_n + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right)}, \dfrac{M}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y}_n - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right)}\right]$ est un intervalle de confiance pour a à 95% .

16. On voit que ces intervalles contiennent a pour tout n, ce qui est rassurant (mais non assuré par les résultats précédents).

17. On attend notamment d'un intervalle de confiance qu'il soit le plus étroit possible. Au vu des figures suivantes, on voudrait choisir $M = a$. Ce choix n'est pas possible : l'intervalle de confiance ne peut dépendre de la valeur a que l'on souhaite estimer !

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire, indispensable. Elle permet de comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés, mais aussi de bien saisir l'enchaînement des questions. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée. Trop de copies sont présentées de manières exécrables : réponses non structurées, ratures innombrables, résultats non encadrés ou soulignés. Certaines copies en deviennent même illisibles. Les candidats ayant une écriture peu lisible gagneraient grandement à aérer leurs copies, le nombre de feuilles n'étant pas limité.
  Rappelons qu'une question illisible ne sera pas lue donc ne rapportera pas de points et met le correcteur dans une position peu favorable pour les questions suivantes.
  Les candidats sont invités à ne pas utiliser d'abréviations.
- Un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière. Traiter les questions et les parties dans le désordre le plus total en mélangeant ces dernières ne fait pas bonne impression. Il n'est pas dérangeant de traiter des parties dans un ordre différent mais revenir temporairement sur diverses questions, à de nombreuses reprises, est pénible et ne permet pas une bonne saisie du raisonnement du candidat pour le correcteur.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Tenter d'arnaquer le correcteur en mettant le résultat final donné dans l'énoncé nuit fortement au candidat étant donné qu'il perd la confiance du correcteur.
- Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entraîner très régulièrement à faire des calculs.
  Lorsqu'un candidat présente un long calcul, notamment une longue résolution de système, il est important d'expliciter les opérations permettant de passer une ligne à l'autre. Sans cela, il est presque impossible au correcteur de s'assurer de la validité dudit calcul.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve. Une majorité de candidats traitent les questions de python, mais une (trop grosse) minorité fait visiblement l'impasse dessus. C'est regrettable, au vu de l'importance de ces questions dans le barème.
Des progrès notables des candidats en Python par rapport à l'année dernière.
On retrouve encore quelques `print` comme instruction de renvoi : c'est incorrect (et à bannir).

Avec une moyenne de 11,2 et un écart-type de 4,66, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice propose la détermination de différentes valeurs approchées de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ avec des précisions de plus en plus fortes. Les premières questions de cet exercice sont très proches du cours et fort détaillées, une plus grande autonomie est attendue sur les toutes derbières questions.

1. Cette question de cours devrait être parfaitement traitée. Ce fut le cas dans une très grande majorité des copies.
   Cependant une mauvaise compréhension des équivalents et des répétitions faites dans le cours afin de bien saisir tous les sens d'une équivalence est constatée. Dire que «$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$» et ensuite que «$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge si et seulement si $\alpha \leqslant 1$»est une répétition inutile.
   De même, dans la phrase «$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et diverge sinon » la deuxième partie est inutile et même n'a pas grand sens.
   Par contre, la phrase «$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$, et diverge si $\alpha < 1$ » ne répond pas complètement à la question.
2. (a) Une question très classique pour laquelle une rédaction précise et rigoureuse est attendue.
   Certains encadrent $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t-1}$. Cette résolution demande une bonne maîtrise des quantificateurs et des étapes. Ainsi n est d'abord fixé ici supérieur ou égal à 2 puis t un réel de $[n, n+1]$ et non $[\![n, n+1]\!]$ (imposant à t d'être un entier!) alors il est possible d'affirmer que $t-1 \leqslant n \leqslant t$ donc que $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{t-1}$ et enfin d'intégrer sur $[n, n+1]$. Cette rédaction demande une certaine gymnastique pour être correcte. La majorité des candidats ayant choisi cette rédaction, n'ont pas réussi à bien la mener. Il est peu conseillé de l'adopter si elle n'est pas comprise ni maîtrisée, le gain de temps n'est pas si important.
   D'autres calculent directement les intégrales et prouvent les inégalités sans utiliser la monotonie de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$. Bien que la résolution soit correcte, elle ne respecte pas les consignes indiquées dans l'énoncé .
   Le calcul de dérivée de $t \mapsto 1/t^2$ (voire le tableau de variations !) est inutilement fasti-

dieux, surtout quand la dérivée est écrite sous la forme $\dfrac{-2t}{(t^2)^2}$

La décroissance de la fonction sur $\mathbb{R}^\star$ est trop souvent citée.

(b) Cette question est en général bien traitée.
Cependant, il est indispensable de passer par les sommes partielles si la relation de Chasles est utilisée ensuite.

3. Cette question est trop peu souvent traitée, et c'est peu compréhensible au vu de sa simplicité. Les candidats ne sont peut-être pas habitués à manipuler des puissances de 10 ?
Cette question a parfois été comprise comme «justifier qu'il existe un entier N_0 tel que [...] », ce qui découle simplement du fait que $R_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ce n'est toutefois pas la question : il convenait d'expliciter un tel N_0.

4. (a) Cette question assez élémentaire a fait apparaître une mauvaise gestion des valeurs absolues et de nombreux arrangements avec les signes et les résultats.
Il est indispensable ici de déterminer le signe de $T_N - S$.
Beaucoup d'étudiants appliquent d'abord l'inégalité triangulaire, ce qui fait apparaître une erreur de l'ordre de $\dfrac{1}{N}$ et non de $\dfrac{1}{N^2}$.
Trop de candidats commentent une erreur de signe en écrivant $|T_N - S| = \left|R_N + \dfrac{1}{N+1}\right|$ et truandent à la fin pour aboutir à la bonne majoration.

(b) Cette question se déduit facilement du (a) et a été trop peu traitée.
Proposer $N_1 = \sqrt{10^3}$ ne pouvait pas convenir: un entier est attendu...

5. (a) Cette question est souvent bien réussie.
Voici les erreurs les plus fréquemment rencontrées : $u_n(p) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^n}$ ou $u_n(p) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

(b) Cette question est en général bien traitée. Une grande rigueur y est attendue.
Le caractère positif n'est pas toujours mentionné.
Par contre tout raisonnement qui de l'équivalent du terme général donne un équivalent de la somme partielle, de la somme ou de la série du type $\sum u_n(p) \sim \sum \dfrac{1}{n^p}$ pour en déduire nature de la série n'est pas accepté.

6. (a) Une question souvent bien réussie, mais dont la résolution est parfois bien longue. Seules les valeurs correctes de a et de b sont attendues.

(b) Cette question a souvent été bien traitée.
Cependant les manipulations du type «$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$», montrent que la manipulation de sommes de séries n'est pas toujours maîtrisée.
Les séries télescopiques ne sont pas au programme. Ainsi un passage par les sommes partielles est attendu.

7. (a) Cette question est en général bien traitée.

(b) Beaucoup traitent cette question par récurrence. un tel raisonnement est tout à fait possible, mais un peu long et lourd ici.

8. (a) Une rédaction précise est attendue pour une telle récurrence où la gestion des quantificateurs est particulièrement surveillée par les correcteurs.
En grande majorité les candidats n'ont pas considéré l'entier n dans la définition de

l'hypothèse de récurrence.
L'hypothèse de récurrence est souvent absente, les réponses démarrant par une simple réécriture de la question et enchaînant directement avec l'initialisation.
L'hérédité est souvent non traitée. Quand elle est traitée, le manque de soin apporté aux calculs a nuit aux candidats: le point d'exclamation apparaît disparaît (rappelons que $(k-1)! \neq k-1$), les parenthèses sont trop souvent omises, le signe $+$ peut se pencher parfois et devenir $\times$ (gênant la suite des calculs) ou disparaît (ce qui revient au même et ne permet pas de mener à bien les calculs.)

(b) Certains ont préféré traiter la question en deux temps et ont en général prouvé de manière très efficace la convergence de la série. D'autres ont seulement prouvé la convergence soit par équivalence soit par majoration.
Par contre, ceux qui ont directement sommé l'égalité obtenue à la question précédente de 1 à $+\infty$ et concluent à la convergence parce que le calcul a abouti ou ne parlent pas du tout de convergence sont pénalisés.

9. Cette question est peu traitée dans sa globalité, seule la comparaison série intégrale est faite et trop souvent bâclée, à nouveau pas de relation de Chasles infinie.
Après avoir effectué une comparaison série-intégrale valide, plusieurs candidats concluent en affirmant que $\dfrac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \underset{n,\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{p+2}}$. C'est une erreur préoccupante : un équivalent est valide asymptotiquement, et ne peut donner de résultat à n fixé.

10. Cette question est peu abordée.

11. Cette question est peu abordée et en général bien traitée quand elle est abordée.
Cependant il est à noter des erreurs d'interprétation de ce genre de graphique. Certains candidats semblent penser que la courbe la plus haute donne l'erreur la plus faible. Il est important de lire l'axe des ordonnées !

Exercice 2

La première partie de cet exercice est consacrée aux polynômes de Lagrange sous une approche algébrique. Puis la deuxième partie s'intéresse au polynôme d'interpolation de Lagrange associé à deux $(n+1)$-uplets et à la recherche de ses coordonnées dans une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie 1

1. (a) Cette question comporte deux étapes: la linéarité et l'injectivité. Il est important de respecter l'ordre de ces étapes quand l'injectivité est prouver en regardant le noyau de Φ: on ne parle de noyau que pour une application linéaire, il faut donc d'abord vérifier que l'application est bien linéaire...
Certains candidats pensent avoir prouvé la linéarité de ϕ en démontrant seulement que $\phi(\lambda P) = \lambda\phi(P)$, c'est insuffisant.
Certains candidats écrivent «si $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, alors P a une infinité de racines». Une telle rédaction ressemble fort à une récitation d'un exemple proche qui a été mémorisé. Il est important de savoir adapter les exemples vus en cours à la situation étudiée !

(b) Le caractère fini de la dimension de l'espace de départ et ou de l'espace d'arrivée ne permet pas de conclure quant à la bijectivité de Φ.

Une confusion régulière entre l'injectivité et la bijectivité est très fréquemment rencontrée.
Quelques candidats répondent, en substance, ■ Ces polynômes existent, car ce sont les polynômes de Lagrange ■. Ce n'est pas parce que ces candidats ont rencontré cet exemple (classique) par le passé qu'ils doivent s'abstenir de répondre à la question !

2. Cette question est peu traitée correctement.
Quelques résolutions très longues et faisant aussi penser à une récitation d'exercices rencontrés lors de la préparation. Il est attendu des candidats qu'ils sachent utiliser leurs connaissances et leurs expériences souvent alimentées par les exercices proposés par leur enseignant, pour mener un raisonnement efficace et rigoureux en lien avec l'énoncé proposé.
Certains candidats construisent 'à la main ' les polynômes L_i en exploitant la donnée de ses racines , son degré et la valeur en 1 , mais omettent de justifier l'unicité.

3. Cette question est inégalement réussie.
Si certains en comprennent bien le sens, d'autres n'explicitent pas les polynômes, ne font aucun calcul c'est-à-dire sans remplacer x_i par sa valeur et ou sans calculer le dénominateur; d'autres encore donnent des polynômes égaux aux polynômes N_K introduits ensuite dans l'énoncé et sans réaction de la part des candidats; d'autres enfin n'ont pas compris que n valait 3 dans cette question.

4. Quand elle est traitée, cette question est plutôt bien traitée.
Quelques candidats cependant pensent que le coefficient dominant vaut 1. On relève aussi un problème de choix des indices : évaluer $L_i(x_j)$ en remplaçant x par x_j dans l'expression algébrique de $L_i(x)$ dans laquelle l'indice qui gère le produit est j ne prouve pas rigoureusement que $L_j(x_j)) = 0$.

5. La définition du produit scalaire est en général bien connue.
Cette question est pratiquement traitée par tous les candidats.
La symétrie et la bilinéarité sont à développer un minimum en en donnant au moins la définition.
Pour la positivité une justification de l'implication suivante est attendue «si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^2(x_k) = 0$, alors $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P^2(x_k) = 0$». Il suffisait pourtant simplement de mentionner que les nombres sommés sont positifs.
Pour la définie-positivité, le nombre de racines n'est pas toujours correct: il est parfois égal à n ou infini.

6. La question est souvent mal analysée : trop de candidats démontrent que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, avant de démontrer que c'est une famille orthonormée.
Certains affirment que les polynômes $L_0, \ldots, L_n$ dont des polynômes de degré deux à deux distincts (après avoir écrit en Q4 qu'ils sont de degré n pour certains !). A nouveau il semble que ces candidats récitent une résolution sans en vérifier l'adéquation ici! Beaucoup oublient de prouver que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base.
Certains se contentent de donner les valeurs des produits scalaires sans détailler ou expliquer les calculs.
Le symbole de Kronecker doit être redéfini et les propriétés de calcul justifiées.

7. Cette question est souvent bien traitée par des méthodes variées (toute méthode correcte étant acceptée ici).

Les candidats semblent plus a l'aise avec l'utilisation des polynômes de Lagrange qu'avec l'expression des coordonnées d'un vecteur en base orthonormée (attendue ici).

Partie 2

8. (a) Cette question est en général bien traitée.
   (b) Cette question est peu abordée.
   Des confusions entre les lignes et les colonnes de M sont rencontrées fréquemment parmi les quelques qui ont abordée la question.
   (c) Quand cette question est abordée, l'inversibilité est bien traitée, le calcul de l'inverse souvent non fait (avec raison).
9. Cette question est en général bien traitée.
   Il aurait été apprécié que le degré de N_k soit donné pour justifier que la famille $(N_0, N_1, ..., N_n)$ est échelonnée en degré.
10. (a) Trop de candidats ne font qu'évaluer les deux expressions en $x_0, \ldots, x_n$, sans conclure par la suite.
    (b) Cette question est peu abordée.
    Certains se lancent dans des récurrences et 'truandent ' pour aboutir ...
11. cette question est peu abordée et rarement bien traitée.

12. Cette question facile n'a pas toujours été repérée ni mise en lien avec la question 9.
13. (a) Les commandes `print` ou `input` sont à abolir des fonctions.
    Beaucoup note `=/=` pour différent, commande n'existant en Python. D'autres conditionnent par `if j==i` et dans ce cas impose au produit de valoir 0 ou 1, ce qui ne donnera pas en final le produit attendu.
    (b) Cette question est peu abordée.
    (c) Cette question est très rarement abordée.
14. (a) $a_0 = y_0$ est souvent établi.
    Pour a_n, certains utilisent le résultat admis dans la question 13 a qui ne l'est plus ici.
    (b) Cette question est rarement abordée.
    (c) Cette question est rarement abordée.
15. (a) La réponse à cette question, peu abordée, est souvent justifiée par un calcul de degré incorrect et aboutit à $\deg(Q_k) = k$. Il était préférable d'utiliser la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}_k[X]$.
    (b) Cette question est rarement abordée.
    (c) Cette question est rarement abordée.
    (d) Cette question est rarement abordée.

Problème

Ce problème porte sur les probabilités et plus particulièrement sur les variables aléatoires à densité. La première partie étudie les variables aléatoires de Cauchy et la somme de variables aléatoires de Cauchy. La deuxième partie permet informatiquement de constater que la loi faible des grands nombres ne s'applique pas pour la loi de Cauchy. Enfin dans la troisième partie, une estimation du paramètre a de la loi de Cauchy est mise en place.

Partie 1

1. Cette question est en général bien résolue. La définition d'une densité de probabilité est bien connue.
   Cependant une adaptation de la définition à l'exemple est attendue. Ainsi quand les candidats précisent que «f est continue, sauf en un nombre fini de points », le correcteur sourit tant la phrase est récitée et peu mise en lien avec le sujet.
   La convergence de l'intégrale est trop rarement prouvée. Ici cette convergence s'établit au cours du calcul: un calcul avec borne finie A, puis le constat de la convergence quand $A \to \infty$, permettent de conclure avec la formule «donc $\displaystyle\int \dots$ converge et vaut 1».
   Les confusions entre l'intégrale généralisée avec l'intégrale à bornes finies qui lui est associée ont été pénalisées.
2. Dans cette question, il possible de dériver F mais dans ce cas,un calcul de limite est attendu ou d'intégrer f sur $]-\infty, x]$.
   Le calcul doit être soigné: Un calcul où l'intégrale de $-\infty$ à x se transforme en une intégrale sur $[A, x]$ le temps du calcul, avant apparition d'un passage à la limite pour retomber sur la bonne formule, n'est pas accepté.
3. Cette question est en général bien traitée.
   Certains candidats invoquent le cours pour résoudre cette question. La loi de Cauchy n'est pas au programme.
   Pour d'autres, l'intégrande étant impaire, l'espérance existe et est nulle.
4. Cette question est en général bien traitée en passant par les fonctions de répartition.
   Une attention particulière est apportée à la gestion de l'équivalence.
5. Dans cette partie, l'argument «après calculs, on obtient [...]» ne peut être accepté, les calculs devaient être détaillés.
   (a) Cette question a été abordée par une petite moitié des candidats.
   Les calculs sont souvent amorcés, rarement aboutis.
   (b) Cette question est peu traitée.
   Beaucoup de candidats ont tenté de raisonner par équivalences, et ont souvent abandonné devant la lourdeur de la tâche. Pourtant, un raisonnement déductif, bien plus léger, s'imposait ici.
   (c) Cette question est rarement traitée.
   (d) Cette question est en général bien traitée par les quelques candidats qui l'ont abordée.
6. (a) La formule de convolution est souvent correctement appliquée, mais l'indépendance des variables aléatoires X et Y est souvent oubliée.
   (b) Cette question est bien traitée lorsqu'elle est abordée mais elle st peu abordée.
7. Cette question est abordée par moins de la moitié des candidats.
   En général l'initialisation est bien réalisée. Mais peu réalisent que dans la question 6 k est un entier naturel. Cette question ne peut donc pas s'appliquer à ka. Dans l'hérédité, l'indépendance est citée mais rarement justifiée par le théorème des coalitions.

CONCOURS ECRICOME PREPA

Partie 2

8. En général la méthode pur déterminer la loi de Y est bien connue et comprise. Cependant de nombreuses justifications sont complètement absentes: la croissance stricte/ la bijectivité de la fonction Arctangente n'est pas assez invoquée; La stricte positivité de a non plus; l'appartenance à $]0,1[$ pour prendre comme expression x comme valeur de $F_U(x)$.
9. Cette question est bien traitée par la majorité des candidats.
10. Cette question est bien traitée par la majorité des candidats.
    Quelques problèmes de taille ou d'indice sont cependant à relever ($n+1$ simulations au lieu de n).
11. Cette question plus difficile, est en général bien moins bien traitée: la moyenne est mal programmée; la réalisation renvoyée est celle de $(\overline{X}_n, \cdots, \overline{X}_n)$.
12. Cette question est rarement traitée.
    L'interprétation en terme de convergence apparaît rarement.
    Certains candidats voient une convergence dans la troisième figure.

Partie 3

13. Peu de candidats ont abordé cette question.
    En général, la loi de $Y_,n$ n'est pas reconnue. F n'est pas la fonction de répartition d'une loi normale; ainsi il est impératif de prouver que $F(-M) = 1 - F(M)$ pour l'utiliser ici.
14. Cette question est peu abordée. L'application de la loi faible des grands nombres n'est pas apparue. La vérification des hypothèses de la loi faible des grands nombres, notamment l'existence de la variance, est un attendue de cette question.
    La loi faible des grands nombres est parfois redémontrée à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev; c'est tout à fait acceptable, mais une perte de temps possible.
15. (a) L'inégalité $p(a)(1-p(a)) \leqslant \dfrac{1}{4}$ a souvent été démontrée correctement, c'est moins le cas pour l'encadrement $0 < p(a) < 1$. Certains candidats ne justifient que l'encadrement $0 \leqslant p(a) \leqslant 1$, ce qui est insuffisant.
    (b) Les hypothèses nécessaires sont assez souvent correctement restituées, mais trop de candidats omettent de justifier que $z > 0$.
    (c) Cette question est très peu traitée.
    (d) Cette question est très peu traitée.
16. Cette question est très peu traitée.
17. Peu de réponses pour cette question. Parmi ces quelques réponses, trop de candidats affirment qu'il faut choisir M vérifiant $\dfrac{M}{a} = 1$, sans s'apercevoir qu'il est impossible de calibrer ainsi un estimateur en fonction du paramètre à estimer.