2024

ANNALES

Mathématiques Appliquées

CONCOURS ECRICOME PREPA

FILIÈRE ÉCONOMIQUE

ET COMMERCIALE

VOIE ECG

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

SOMMAIRE

CONCOURS ECRICOME PREPA

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie I

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} R_X(k) &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X=i) \\ &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} p(1-p)^{j+k} \\ &= p(1-p)^k \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j \\ &= (1-p)^k. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N},\ R_X(k) = (1-p)^k$

(b) D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \frac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} = 1-p.$$

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1-p.$

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $[X > k-1] = [X > k] \cup [X = k]$. Comme $[X > k]$ et $[X = k]$ sont incompatibles, $P(X > k-1) = P(X > k) + P(X = k)$. Donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k).$

(b) **($\Longrightarrow$)** Supposons que X et Y suivent la même loi.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$R_X(k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X=i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(Y=i) = R_Y(k).$$

($\Longleftarrow$) Supposons que $R_X(k) = R_Y(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Alors d'après la question précédente, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=j) = R_X(j-1) - R_X(j) = R_Y(j-1) - R_Y(j) = P(Y=j)$$

et de plus $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ par hypothèse, donc X et Y suivent la même loi.

Finalement, X et Y suivent la même loi si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N},\ R_X(k) = R_Y(k)$.

Partie II

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{a}{n!} - \dfrac{b}{(n+1)!}$ avec $a = b = 1$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{(N+1)!}, \end{aligned}$$

Ainsi la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Par définition, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{n}{(n+1)!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

4. (a) D'après le théorème de transfert, $X+1$ admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (n+1) P(X = n)$ converge absolument.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)P(X = n) = \dfrac{(n+1)n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n-1)!}$ et (à changement d'indice près) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!}$ est une série exponentielle absolument convergente,

Ainsi $X+1$ admet une espérance, et $E(X+1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Par linéarité de l'espérance, comme $X = (X+1) - 1$, X admet une espérance et $E(X) = E(X+1) - 1 = e - 1$.

(b) D'après le théorème de transfert, $(X-1)(X+1)$ admet une espérance si et seulement si la série

$\sum_{n\geqslant 1}(n-1)(n+1)P(X=n)$ converge absolument.

Or pour tout entier $n \geqslant 2$, $(n-1)(n+1)P(X=n) = \dfrac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n-2)!}$,
et en reconnaissant à nouveau le terme général d'une série exponentielle (à changement d'indice près), la série $\sum_{n\geqslant 1}(n-1)(n+1)P(X=n)$ converge absolument.

$\boxed{\text{Donc } (X-1)(X+1) \text{ admet une espérance}}$ et $E\big((X-1)(X+1)\big) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e$.

Par linéarité de l'espérance, comme $X^2 = (X-1)(X+1)+1$, $\boxed{X^2 \text{ admet une espérance}}$ et $E(X^2) = e+1$.

D'après la formule de Koenig-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

$\boxed{\text{Donc } X \text{ admet une variance et } V(X) = e+1-(e-1)^2 = e(3-e).}$

Partie III

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé, $1-\alpha_k$ correspond à la probabilité que l'appareil fonctionne encore à l'issue de l'année k sachant qu'il fonctionnait encore à l'issue de l'année $k-1$.
   Alors $1-\alpha_k = P_{[X>k-1]}(X>k) = \dfrac{P\big([X>k]\cap[X>k-1]\big)}{P(X>k-1)} = \dfrac{P(X>k)}{P(X>k-1)} = \dfrac{R_X(k)}{R_X(k-1)}$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } R_X(k) = (1-\alpha_k)R_X(k-1)}$
6. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

   Initialisation. Pour $k=1$, $R_X(1) = P(X>1) = 1-P(X=1) = 1-\alpha_1 = \prod_{i=1}^{1}(1-\alpha_i)$.

   Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $R_X(k) = \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i)$. Alors, d'après la question précédente :

   $$R_X(k+1) = (1-\alpha_{k+1})R_X(k) \underset{HR}{=} (1-\alpha_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i) = \prod_{i=1}^{k+1}(1-\alpha_i).$$

   $\boxed{\text{Par le principe de récurrence, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ R_X(k) = \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i).}$
7. D'après la question 2.(a), pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= R_X(k-1) - R_X(k) \\ &= R_X(k-1) - (1-\alpha_k)R_X(k-1) \quad \text{d'après la question 5.} \\ &= \alpha_k R_X(k-1) \\ &= \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i) \quad \text{d'après la question 6.} \end{aligned}$$

Pour $k=1$, $P(X=1)=1-R_X(1)=\alpha_1$.

Ainsi $P(X=1)=\alpha_1$ et pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $P(X=k)=\alpha_k\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i)$

8. (a) $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $P(X=1)=p$ et, pour tout entier $k\geqslant 2$,

$$P(X=k)=p\prod_{i=1}^{k-1}(1-p)=p(1-p)^{k-1},$$

donc X suit la loi géométrique de paramètre p.

(b) $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $P(X=1)=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{(1+1)!}$ et, pour tout entier $k\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}P(X=k) &= \frac{k}{k+1}\prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{i+1}\right)\\ &= \frac{k}{k+1}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i+1}\\ &= \frac{k}{k+1}\frac{1}{k!}\\ &= \frac{k}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

Alors X suit la même loi que la variable aléatoire étudiée dans la **Partie II**.

Partie IV

9. (a)

```
SELECT COUNT(*) FROM ordinateur
```

(b)

```
SELECT COUNT(*) FROM ordinateur
WHERE annee_panne - annee_fabrication = 1
```

(c) Puisqu'on suppose que la durée de vie des ordinateurs suit une loi géométrique de paramètre p, alors la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie d'un an exactement est égale à $p(1-p)^0=p$. Or cette probabilité peut être estimée par la proportion du nombre d'ordinateurs ayant cessé de fonctionner au bout d'un an exactement.

On peut estimer p comme le quotient du résultat de la question 9.(b) par celui de la question 9.(a).

10.

```
UPDATE ordinateur
SET duree_vie = annee_panne - annee_fabrication
WHERE annee_panne > -1
```

11. (a) Cette requête calcule la moyenne empirique des durées de vie des ordinateurs étudiés, qui est une estimation de l'espérance de la loi étudiée. Or s'il s'agit d'une loi géométrique de paramètre p, alors cette espérance vaut $\dfrac{1}{p}$.
Ainsi, $\boxed{p \text{ peut être estimé par l'inverse de la valeur renvoyée par la requête}}$.

(b) Notons X la variable aléatoire égale à la durée de vie d'un ordinateur et $(\alpha_k)_{k\in N^*}$ la suite définie à la **Partie III**.
Montrer que X suit la loi géométrique de paramètre p revient à montrer que, pour tout $k \geq 2$:
$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = 1-p.$$
Or, les résultats renvoyés par les 24 requêtes sont respectivement $P(X=1)$, $P(X=2)$, $\ldots$, $P(X=24)$.
Ainsi, il suffit de calculer les quotients des résultats des paires de lignes consécutives. Si ces quotients sont tous relativement proches d'une valeur q, on peut en déduire que X suit la loi géométrique de paramètre $1-q$.

EXERCICE 2

Partie I

1. (a) Pour tout réel t, on a $t^2e^{-2at-t^2} = t^2e^{-t}.\ e^{-(2a-1)t-t^2}$.
Or $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-t} = 0$ par croissances comparées
Et $-(2a-1)t-t^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} -t^2$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} -(2a-1)t-t^2 = -\infty$. Alors $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-(2a-1)t-t^2} = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-2at-t^2} = 0$, $\boxed{\text{ou encore } e^{-2at-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)}$.

(b) La fonction $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue et à valeurs positives sur $[0,+\infty[$, et $e^{-2at-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, donc par comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt$ converge.
$\boxed{\text{Finalement, } \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt \text{ converge}}$.

2. Soit $x \in I\!R$. D'après la question précédente, la quantité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\,dt = e^{2ax}J_a$ est bien définie.
De plus la fonction $t \mapsto e^{2a(x-t)-t^2}$ est continue sur $I\!R$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^0 e^{2a(x-t)-t^2}\,dt$ n'est pas impropre.
Finalement, $I_a(x)$ est bien défini, ceci pour tout $x \in I\!R$, ou encore $\boxed{\text{la fonction } I_a \text{ est définie sur } I\!R}$.

3. (a) L'intégrale J_a est convergente donc par définition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(J_a - \int_0^x e^{-2at-t^2}\,dt\right) = 0$,

c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt = 0}$.

(b) Soit x un réel.
Pour tout $t\in[x,+\infty[$, $2a(x-t)\leqslant 0$ car $a\geqslant 0$, donc $2a(x-t)-t^2\leqslant -t^2$. Par croissance de l'exponentielle, on obtient : $e^{2a(x-t)-t^2}\leqslant e^{-t^2}$.

Ainsi, par croissance de l'intégrale, $I_a(x)\leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

(c) On distingue deux cas.

- **Si** $a\geqslant 0$**,** alors d'après la question précédente et par positivité de l'intégrale, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$0\leqslant I_a(x)\leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\,.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 0$ car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$.

- **Si** $a<0$**,** alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $I_a(x) = e^{2ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt$, et par produit de limites, en utilisant le résultat de la question 3a), $\lim\limits_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$.

Finalement, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$.

Partie II

4. D'après les résultats du cours, les solutions de l'équation (2) sont les fonctions de la forme $x\longmapsto \lambda e^{2ax}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$.

5. (a) La fonction $f_a : t\mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, F_a est une primitive de f_a,

Donc F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $F_a'(x) = e^{-2ax-x^2}$.

(b) Soit x un réel.

$$I_a(x) = e^{2ax}\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt = e^{2ax}\left(\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt - \int_0^x e^{-2at-t^2}\,dt\right) = e^{2ax}\big(J_a - F_a(x)\big).$$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}$, $I_a(x) = e^{2ax}\big(J_a - F_a(x)\big)$.

(c) Les fonctions $x\mapsto e^{2ax}$ et F_a sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par produit I_a est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} I_a'(x) &= 2ae^{2ax}\big(J_a - F_a(x)\big) - e^{2ax}F_a'(x)\\ &= 2aI_a(x) - e^{2ax}e^{-2ax-x^2}\\ &= 2aI_a(x) - e^{-x^2}\,. \end{aligned}$$

Ainsi I_a est solution de l'équation différentielle (1).

6. En additionnant la solution générale de l'équation différentielle homogène (2) à la solution particulière I_a de l'équation (1), on obtient les solutions de (1), qui sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda e^{2ax} + I_a(x)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

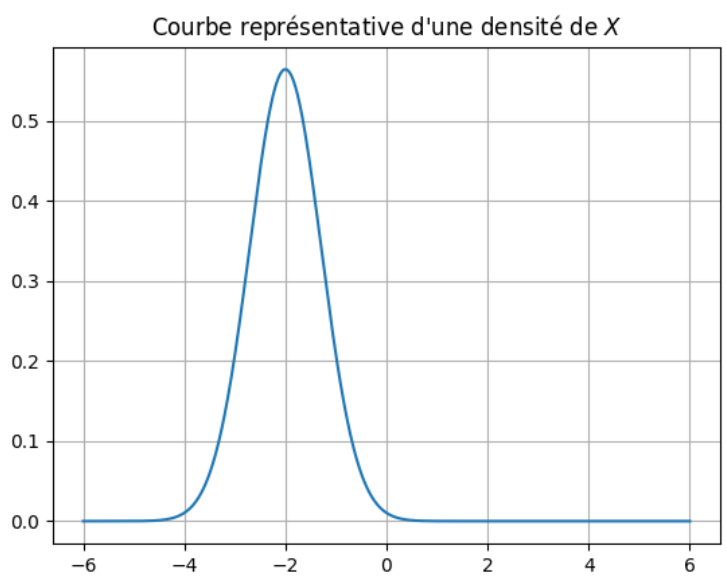
7. Les solutions de (1) sont les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \lambda e^{2ax} + I_a(x)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dans tous les cas, on sait d'après la question 3.(c) que $\lim_{x\to\infty} I_a(x) = 0$.
   (a) Supposons que $a < 0$, alors, par somme de limites, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} \big(\lambda e^{2ax} + I_a(x)\big) = 0$.
   Donc toutes les solutions de (1) tendent vers 0 en $+\infty$
   (b) Supposons que $a = 0$, alors :
   - Si $\lambda \neq 0$, alors $x \mapsto \lambda e^{2ax}$ ne tend pas vers 0 quand $x \to +\infty$, donc y_λ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
   - Si $\lambda = 0$, alors $y_0 = I_a$, donc y_0 tend vers 0 en $+\infty$.

   Finalement, dans ce cas, I_a est l'unique solution de (1) qui tend vers 0 en $+\infty$.
   (c) Supposons que $a > 0$, alors :
   - Si $\lambda \neq 0$, alors $x \mapsto \lambda e^{2ax}$ ne tend pas vers 0 quand $x \to +\infty$, donc y_λ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
   - Si $\lambda = 0$, alors $y_0 = I_a$, donc y_0 tend vers 0 en $+\infty$.

   Finalement, dans ce cas, I_a est l'unique solution de (1) qui tend vers 0 en $+\infty$.

Partie III

8. (a) La fonction φ_a définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi_a(x) = \dfrac{e^{-(x+a)^2}}{\sqrt{\pi}}$ est une densité de X.
   (b)



9. (a) $P(X \geqslant x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi_a(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-(t+a)^2}\,dt\,.$

(b) Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X \geqslant x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2-2at-a^2}\,dt \\ &= \frac{e^{-2ax-a^2}}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{2ax-t^2-2at}\,dt \\ &= \frac{e^{-2ax-a^2}}{\sqrt{\pi}} I_a(x)\,, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $I_a(x) = \sqrt{\pi}\, e^{2ax+a^2} P(X \geqslant x)$

10. (a) D'après le résultat du cours sur les transformations affines de lois normales, si Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\dfrac{\sqrt{2}}{2} Z - a$ suit une loi normale d'espérance $-a$ et de variance $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire la même loi que X.

Ainsi pour $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\beta = -a$, $\alpha Z + \beta$ suit la même loi que X.

(b)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def estim_proba(a, x):
    num = 0
    for i in range(10000):
        Z = np.normal()
        X = - a + z / np.sqrt(2)
        if X >= x:
            num = num + 1
    return num / 10000
```

11. On utilise l'identité montrée à la question 9.(b) en estimant $P(X \geqslant x)$ à l'aide de la fonction `estim_proba` ci-dessus.

```
def approx_I(a, x):
    return np.sqrt(np.pi) * np.exp(2*a*x + a**2) * estim_proba(a, x)
```

EXERCICE 3

Partie I

1. (a) M est symétrique donc diagonalisable .

(b) $(M+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M+I_3)$.

Ainsi $(M+I_3)^2 - 3(M+I_3) = 0_3$, c'est-à-dire $(M+I_3)(M-2I_3) = 0_3$.

Autrement dit, $(x+1)(x-2)$ est un polynôme annulateur de M.

(c)

◇ Les racines du polynôme $(x+1)(x-2)$ sont -1 et 2 , donc les seules valeurs propres possibles de M sont -1 et 2 .
Vérifions que -1 et 2 sont bien valeurs propres de M .

◇ Notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors $MX_1 = -X_1$ et $MX_2 = -X_2$, et (X_1, X_2) est une famille libre car les vecteurs X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires.
Ainsi -1 est valeur propre de M et (X_1, X_2) est une famille libre du sous-espace propre associé.

◇ Notons $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $MX_3 = 2X_3$, or $X_3 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc 2 est valeur propre de M et X_3 est un vecteur propre associé.

CONCOURS ECRICOME PREPA

◇ Alors (X_1, X_2, X_3) forme une famille libre de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de dimension 3. Donc (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Finalement, les valeurs propres de M sont -1 et 2 et une base de $E_{-1}(M)$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ et une base de $E_2(M)$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

(d) On pose $Q = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\1 & 1 & -2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Alors $PQ = QP = I_3$.

Ainsi P est inversible et $P^{-1} = Q = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\1 & 1 & -2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(e) On remarque que les colonnes de P sont les vecteurs propres X_1, X_2 et X_3 respectivement, c'est-à-dire que P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base (X_1, X_2, X_3). Ainsi, par formule de changement de base, $D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

(f) On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $k = 0$, $M^0 = I_3 = PI_3P^{-1} = PD^0P^{-1}$.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $M^k = PD^kP^{-1}$.

Alors, d'après la question précédente, $M = PDP^{-1}$, donc

$$M^{k+1} = MM^k = PDP^{-1}.PD^kP^{-1} = PDD^kP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}.$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$.

(g) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour déterminer a_k et b_k, on peut par exemple calculer les deux premiers coefficients de la première ligne de M^k, et les comparer avec ceux de $a_kM + b_kI_3$.

Comme D étant diagonale, $D^k = \begin{pmatrix}(-1)^k & 0 & 0\\0 & (-1)^k & 0\\0 & 0 & 2^k\end{pmatrix}$.

Puis $M^k = PD^kP^{-1} = P\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^k & -2(-1)^k & (-1)^k\\(-1)^k & (-1)^k & -2(-1)^k\\2^k & 2^k & 2^k\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2(-1)^k + 2^k & 2^k - (-1)^k & c_k\\d_k & e_k & f_k\\g_k & h_k & i_k\end{pmatrix}$,

où $c_k, d_k, e_k, f_k, g_k, h_k, ik$ sont des coefficients qu'on ne cherche pas à calculer.

Par ailleurs,

$$a_kM + b_kI_3 = \begin{pmatrix}b_k & a_k & a_k\\a_k & b_k & a_k\\a_k & a_k & b_k\end{pmatrix},$$

Donc en identifiant les coefficients : $a_k = \dfrac{2^k - (-1)^k}{3}$ et $b_k = \dfrac{2(-1)^k + 2^k}{3}$.

2. (a) On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Pour $k = 1$, $J_n^1 = n^0J_n$.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $J_n^k = n^{k-1} J_n$.

Par calcul matriciel on obtient que $J_n^2 = n J_n$. Alors

$$J_n^{k+1} = J_n^k J_n = n^{k-1} J_n \cdot J_n = n^{k-1} \cdot n J_n = n^k J_n.$$

Finalement, par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $J_n^k = n^{k-1} J_n$.

(b) $M_n = J_n - I_n$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $J_n(-I_n) = (-I_n)J_n$, donc par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} M_n^k &= (J_n - I_n)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} J_n^i \\ &= (-1)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1} \right) J_n \end{aligned}$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M_n^k = (-1)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1} \right) J_n.$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i} - (-1)^k \right) \\ &= \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}. \end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ c_k = \dfrac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.$

(e) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M_n^k = c_k J_n + (-1)^k I_n$.

Donc les coefficients diagonaux de M_n^k sont tous égaux à $c_k + (-1)^k = \dfrac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n}$,

et les coefficients non diagonaux de M_n^k sont égaux à $c_k = \dfrac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$.

Partie II

3.

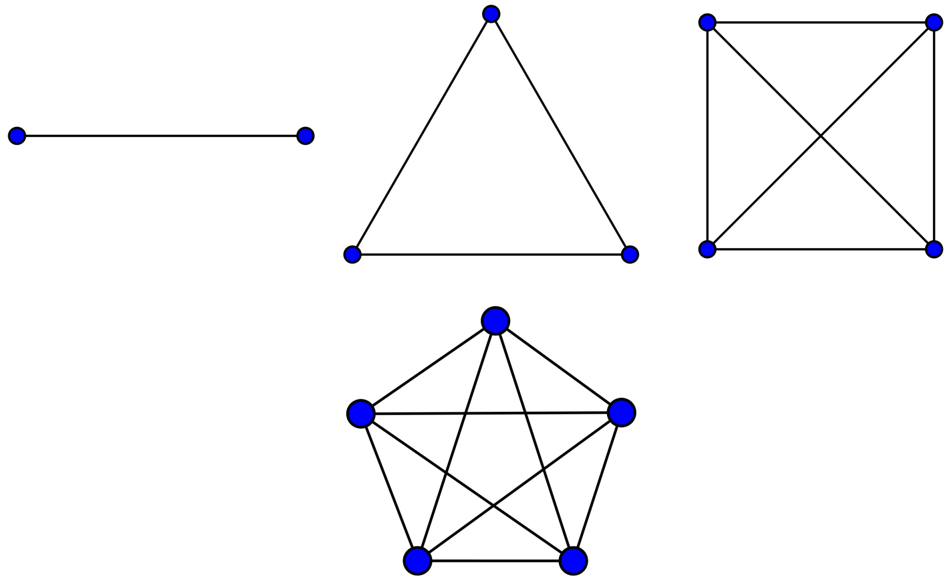


FIGURE 1 – De gauche à droite, respectivement : représentation des graphes K_2, K_3, K_4 et K_5.

4. (a) D'après la définition du graphe K_n, la matrice d'adjacence de K_n est la matrice M_n.
   (b) Le nombre de chaînes de longueur 4 menant du sommet 1 à lui-même est égal au coefficient situé en première ligne et première colonne de la matrice M_4^4, c'est-à-dire, d'après la question 2.(e), $\dfrac{3^4+3(-1)^4}{4}=21$.
   Il y a donc 21 chaînes de longueur 4 menant du sommet 1 à lui-même.
5. Le degré d'un sommet est égal au nombre d'arêtes menant à ce sommet. Chaque sommet de K_n étant relié à tous les autres sans être relié à lui-même, tous les sommets de K_n ont un degré égal à $n-1$.
6. Il y a autant d'arêtes dans le graphe K_n que de façons de choisir 2 sommets distincts parmi les n sommets.
   Ainsi le graphe K_n possède $\dbinom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

Partie III

7. X_0 est constante égale à 1 donc $V_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$.
   X_1 suit la loi uniforme sur $[\![2,n]\!]$ car on se déplace avec équiprobabilité sur n'importe lequel des sommets qui ne sont pas le sommet 1. Ainsi, $V_1=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1}\end{pmatrix}$.
8. Chaque sommet peut mener à chaque autre sommet avec équiprobabilité, donc la matrice de transition de $(X_k)_{k\in N}$ est $\dfrac{1}{n-1}M_n$.
9. (a) Un état stable de $(X_k)_{k\in N}$ est une loi de probabilités $V=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & \dots & p_n\end{pmatrix}$ sur

l'ensemble $[\![1,n]\!]$ des états (c'est-à-dire $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $p_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$) telle que $V = V \cdot \frac{1}{n-1} M_n$.

(b) Pour tout entier naturel i de $[\![1,n]\!]$, $V_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} V_i = 1$. De plus,

$$V \cdot \frac{1}{n-1} M_n = \frac{1}{n(n-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{n(n-1)} \begin{pmatrix} n-1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} = V,$$

Donc V est un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$

10. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{V_{k+1} = \frac{1}{n-1} V_k M_n}$.

(b) On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $k = 0$, $V_0 = \frac{1}{(n-1)^0} V_0 M_n^0$.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 M_n^k$. Alors, d'après la question précédente

$$V_{k+1} = \frac{1}{n-1} V_k M_n \underset{HR}{=} \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{(n-1)^k} V_0 M_n^k \right) M_n = \frac{1}{(n-1)^{k+1}} V_0 M_n^{k+1},$$

Finalement, par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 M_n^k$.

(c) D'après la question 2e), pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(n-1)^k} M_n^k = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 + \frac{(-1)^k}{(n-1)^{k-1}} & 1 + \frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)^k} & \cdots & 1 + \frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)^k} \\ 1 + \frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)^k} & 1 + \frac{(-1)^k}{(n-1)^{k-1}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 + \frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)^k} \\ 1 + \frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)^k} & \cdots & 1 + \frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)^k} & 1 + \frac{(-1)^k}{(n-1)^{k-1}} \end{pmatrix},$$

donc

$$V_k = V_0 \frac{1}{(n-1)^k} M_n^k = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 + \frac{(-1)^k}{(n-1)^{k-1}} & 1 + \frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)^k} & \cdots & 1 + \frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)^k} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que tous les coefficients de la matrice V_k convergent vers $\frac{1}{n}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

Autrement dit, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\lim_{k \to +\infty} P(X_k = j) = \frac{1}{n},$$

donc $\boxed{(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire de loi uniforme sur } \llbracket 1, n \rrbracket}$.

11. À la question 9.(b), on a montré que la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ est un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$. La question précédente illustre donc le phénomène de convergence d'une chaîne de Markov vers son état stable.

RAPPORT D'ÉPREUVE

1 Commentaires généraux

Le sujet présente trois exercices permettant de couvrir le programme. L'informatique était bien présente dans le sujet et s'articulait avec les mathématiques.

Le sujet offre une belle progression avec notamment des questions de connaissance du cours assez simples permettant de distinguer dans les candidats faibles les élèves sérieux des autres.

On pourra de nouveau déplorer un trop grand nombre de copies dont le soin et la lisibilité n'était pas au rendez-vous. Pour rappel, une réponse illisible est par défaut considérée comme erronée. L'expression écrite est parfois fragile, le vocabulaire et les tournures de phrases ne sont pas toujours maîtrisées. Trop de candidats abusent des abréviations : même quand elles sont compréhensibles, ce qui n'est pas toujours le cas, elles n'ont pas leur place dans une copie de concours.

Une bonne partie des candidat a commencé par travailler sur l'exercice 3 avec de l'algèbre et de la théorie des graphes.

On retrouve fréquemment des réponses inabouties, mettant en avant un manque de maîtrise des raisonnements développés.

Avec une moyenne de 11,2 et un écart-type de 4,83, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

2 Commentaires particuliers

Exercice 1

Partie I

1. (a) Les candidats n'ont étonnamment pas été à l'aise sur cette question.
   Certains candidats confondent la loi géométrique avec une loi à densité.
   (b) On relève beaucoup de tentatives d'escroquerie pour retomber sur le bon résultat.
2. (a) Cette question est assez mal traitée. L'opposée de la réponse attendue a souvent été relevée. Certains candidats ont continuer de considérer seulement la loi géométrique.
   (b) Beaucoup de candidats ne traitent, implicitement, qu'un seul sens de l'équivalence. Les autres tentent en général une démonstration par équivalences successives, fausse la plupart du temps.

Partie II

3. (a) Question assez bien réussi dans l'ensemble. On peut quand même noter une absence de justification dans le valeurs de a et b dans un nombre non négligeable de copies.
   (b) Les raisonnements sont parfois compliqués pour arriver à la convergence avec des erreurs de notations (somme finie/somme infinie/série) et de calculs.

4. (a) Le théorème de transfert est assez bien énoncé. Cependant son application est moins bien réussie.
   (b) Une fois de plus le théorème de transfert est bien énoncé mais le calcul qui en résulte n'est pas une réussite. La fomule de Kœnig-Huygens est bien citée.

Partie III

5. Très peu de candidats utilisent correctement une probabilité conditionnelle pour établir le résultat.

   Certains candidats reprennent encore la loi géométrique.
6. Beaucoup de raisonnements « de fil en aiguille », mais très peu de récurrences.

   Sans récurrence, certains candidats ont traité correctement la question avec la formule des probabilités composées.
7. La factorisation par le produit $\prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i$ pas toujours effectuée
8. (a) Beaucoup de candidats reconnaissent la bonne loi mais sans aucune justification
   (b) La loi a globalement été trouvée juste. Peu de candidats ont reconnu la loi de la partie II, ce qui n'était pas demandé.

Partie IV

9. (a) Question souvent traitée, y compris dans les copies presque vides. Assez bien réussi.
   (b) Des maladresses sur le test : `annee_panne=1` ou 2001 seulement.
   (c) Question peu traitée ou non comprise.
10. Peu réussie.
11. (a) Le lien entre durée de vie moyenne et espérance n'est pratiquement jamais fait, et lorsqu'il est fait, l'espérance de loi géométrique n'est pas connue
    (b) Rarement compréhensible

Exercice 2

Partie I

1. (a) La plupart des candidats invoquent les croissances comparées mais ne déterminent pas la limite du quotient avec le soin attendu.

   Quelques candidats n'hésitent pas à composer, à tort, des équivalents par la fonction exponentielle. Certains vont même jusqu'à écrire que l'équivalence est compatible avec la composition.
   (b) La continuité est une condition trop souvent oubliée. Beaucoup de candidats avancent des intégrales de Riemann allant de 0 à $+\infty$.
2. La question n'a pas été comprise, la convergence a été occultée la plupart du temps.
3. (a) Peu de candidats voient qu'il s'agit du reste d'une intégrale convergente, et que la réponse découle de la convergence de l'intégrale J_a. Le raisonnement le plus fréquent faisait

apparaître une intégrale allant de $+\infty$ à $+\infty$ sans jamais mentionner une quelconque convergence.

(b) L'inégalité a été assez bien traité sauf que peu s'inquiètent de la convergence de $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

(c) Le cas $a < 0$ n'est pratiquement jamais considéré.

Trop de candidats raisonnent par encadrement des limites mais sans encadrement, juste avec une majoration.

Partie II

4. Beaucoup trop d'erreurs pour cette question de cours.
5. (a) Très mal traitée alors qu'il s'agit d'une question de cours.
   (b) Question bien traitée.
   (c) Les candidats ne montrent en général que la dérivabilité de I_a. Certains se lancent dans le calcul de la dérivée mais très peu arrivent à conclure.
6. Question bien traitée, lorsqu'elle est traitée.
7. Question peu traitée.

Partie III

8. (a) Trop peu de bonnes réponses pour une question de cours.
   (b) Peu traitée et peu réussie. Certains étudient les variations de la fonction densité en calculant sa dérivée.
9. (a) L'énoncé demandait explicitement la réponse sous forme d'une intégrale (et non à l'aide d'une intégrale). Sur bon nombre de copies le résultat est laissé sous la forme $1 - \displaystyle\int$.
   (b) Question peu traitée mais plutôt bien faite, quand la question est traitée.
10. (a) Peu de bonnes réponses alors qu'il s'agit d'une question de cours.
    (b) Les 2 premières lignes souvent bien traitées, quand à la troisième il manque souvent la division par 10000.
11. La question est bien traitée en général. La constante π doit être "sortie" du module `numpy` par la commande `np.pi`.

Exercice 3

Partie I

1. (a) Très bien traitée
   (b) L'égalité $(M + I)^2 = 3(M + I)$ n'est pas toujours explicitement écrite mais le bon polynôme annulateur est quand même trouvé.
   On note des confusions entre I et $M + I$.
   (c) De nombreux étudiants sont à l'aise avec cette question et savent très bien chercher les bases des sous espaces propres. Cependant beaucoup de candidats oublient de préciser une base de chaque sous-espace propre.

(d) Beaucoup de candidats ne pensent pas à simplement vérifier en faisant le calcul PP^{-1}. La plupart des étudiants utilisent (très souvent correctement) la méthode de Gauss-Jordan pour retrouver P^{-1}.
(e) Question bien traitée, même chez les candidats s'étant trompé sur les valeurs propres dans les question précédentes.
(f) Très bien traitée
(g) Assez peu de candidats sont partis sur le calcul explicite de M^k, pas toujours avec succès. Deux autres méthodes assez élégantes ont été utilisées, avec plus de succès. La première en passant par des suites récurrentes linéaires d'ordre 2. La deuxième en se ramenant à $D^k = a_k D + b_k I_3$ puis à la résolution d'un simple système linéaire.

2. (a) Dans beaucoup de copies, on note une erreur de raisonnement dans la récurrence. Dans l'hérédité, l'égalité $J^2 = nJ$ est utilisé et justifiée comme étant l'hypothèse de récurrence au rang $k = 2$ alors que l'initialisation est faite au rang $k = 1$.
En-dehors de ce point, la question a été bien traitée.
(b) Très bien traitée
(c) Beaucoup d'étudiants pensent à utiliser la formule du binôme de Newton et vérifient correctement le fait que les matrices J_n et I_n commutent, mais tout s'écroule lorsque qu'ils écrivent la somme en partant de $k = 1$ au lieu de $k = 0$, probablement influencé par le résultat à établir dans la question suivante.
(d) Ici encore, pour le calcul de c_k, on retrouve la même erreur que dans la question précédente.
(e) On note beaucoup d'erreurs sur les cœfficients diagonaux.

Partie II

3. Pour les candidats qui ont traité cette question, beaucoup répondent juste le plus souvent. Mais régulièrement, on trouve des représentations compliquées pour K_5.
Certains candidats ont tracé des graphes orientés (avec doubles arêtes).
4. (a) La plupart des candidats trouvent la bonne matrice mais sans la reconnaître.
(b) Beaucoup de candidats font seulement une liste de chemins mais en oublient une bonne partie.
Peu de candidats utilisent directement l'expression de c_4 mais recalculent M_4^4, plutôt correctement.
5. Très bien traitée
6. Beaucoup d'explication longues et pas très clair pour essayer faire le lien, peu convaincant, avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k$.

Partie III

7. V_1 est souvent faux.
8. La matrice est souvent fausse.
9. De nombreux candidats oublient de préciser que les coefficients du vecteur de l'état stable doivent être des nombres positifs de somme 1.

(a) Là encore, la somme égale à 1 et les coefficients positifs sont rarement vérifiés.

(b) Question peu souvent traitée, du fait d'une mauvaise connaissance de ce qu'est un état stable.

10. (a) Trop de candidats confondent avec une expression faisant intervenir des vecteurs colonnes.

    (b) Un nombre trop important ne procède pas par récurrence mais par itérations successives.

    (c) Question très peu traitée.

11. Question très peu traitée .