2020

CORRIGÉ

MATHEMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A

1.
```
n = input('Entrer n : ')
u = 0 ; v = 1
for k = 1:n                    // ou  for k = 2:n+1
        w = u
        u = v
        v = 7*v+8*w        // ou   v = 7*u+8*w
end
disp(u)
```

2.
$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = (7u_{n+1} + 8u_n) + u_{n+1} = 8(u_{n+1} + u_n) = 8s_n$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = s_0 8^n = (u_0 + u_1)8^n = 8^n$.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}, t_n = v_n - v_{n+1} = (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1} = (-1)^n (u_n + u_{n+1}) = (-1)^n s_n$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $t_n = (-1)^n 8^n = (-8)^n$.

4. (a) Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = \frac{1-(-8)^n}{1+8} = \frac{1-(-8)^n}{9}$.

   (b) En reconnaissant une somme télescopique, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = v_0 - v_n = 0 - v_n = -v_n$.

   (c) On en déduit que :
$$\forall n \geqslant 1, v_n = -\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = \frac{(-8)^n - 1}{9}$$
   puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n v_n = \frac{8^n - (-1)^n}{9} = \frac{8^n + (-1)^{n+1}}{9}$$

Partie B

1. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} = 7M + 8I$.

   Comme $M^2 - 7M - 8I = 0$, le polynôme $Q(X) = X^2 - 7X - 8$ est bien annulateur de M.

2. On a en particulier :
$$M^2 - 7M = 8I \Longrightarrow M\left(\frac{1}{8}M - \frac{7}{8}I\right) = I$$
Donc M est inversible et $M^{-1} = \dfrac{1}{8}M - \dfrac{7}{8}I$.

3. (a) $M^0 = I$ et par ailleurs $0M + 1I = I$, donc on a bien $M^0 = a_0M + b_0I$.

   (b) Les réels $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent de manière évidente : $M^1 = 1 \cdot M + 0 \cdot I$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_nM + b_nI$. Alors :
$$M^{n+1} = M^n \cdot M = (a_nM + b_nI) \cdot M = a_nM^2 + b_nM = a_n(7M + 8I) + b_nM$$
En développant, on a alors :
$$M^{n+1} = (7a_n + b_n)M + (8a_n)I$$
En posant donc $a_{n+1} = 7a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 8a_n$, on obtient bien : $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$.

   (d)
   - Pour $n = 0$, on a $a_0 = 0$.
   - Pour $n = 1$, on a $a_1 = 1$.
   - Puis pour tout $n \geqslant 1$,
$$a_{n+1} = 7a_n + b_n = 7a_n + 8a_{n-1}$$
Ainsi, la suite (a_n) vérifie exactement la définition de la suite (u_n). On a donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = u_n$$

Partie C

1. Si le tableau représente bien une loi de couple, alors nécessairement a somme des cases fait 1.
On doit donc avoir $24\beta = 1$, i.e. $\beta = \dfrac{1}{24}$.

2. Pour les lois marginales de X et Y, on obtient :

k	1	2	3
P(X=k)	$8\beta = \frac{1}{3}$	$8\beta = \frac{1}{3}$	$8\beta = \frac{1}{3}$

Donc X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, et on obtient de même pour Y.
On en déduit que $E(X) = E(Y) = \dfrac{1+3}{2} = 2$.

3. (a) On connait la loi du couple (X,Y)

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24}$
2	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$
3	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$

On applique alors la formule de transfert donnant $E(XY)$:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{\substack{i\in X(\Omega)\\ j\in Y(\Omega)}} i\ j\ P([X=i]\cap[Y=j]) \\
&= 1\times\frac{2}{24}+2\times\frac{3}{24}+3\times\frac{3}{24}+2\times\frac{3}{24}+4\times\frac{2}{24}+6\times\frac{3}{24}+3\times\frac{3}{24}+6\times\frac{3}{24}+9\times\frac{2}{24} \\
&= \frac{47}{12}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y) = \frac{47}{12}-4 = \frac{-1}{12}$$

(b) Comme $\operatorname{cov}(X,Y)\neq 0$, les variables X et Y ne peuvent pas être indépendantes.

EXERCICE 2

Partie A

1. Le discriminant du polynôme X^2+X+1 vaut $\Delta=-3<0$. Ainsi, l'équation $x^2+x+1=0$ n'admet aucune solution réelle.
2. On applique la règle des facteurs de plus haut degré :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1+x+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0$$

3. La fonction f est dérivable en tant que fonction rationnelle, le dénominateur ne s'annulant jamais, et on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ f'(x) = \frac{1\cdot(1+x+x^2)-x\cdot(1+2x)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1-x^2=(1-x)(1+x)$.

On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	0

4. (a) Une équation de (T) est donnée par :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Comme $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, (T) a pour équation $y = x$.

(b) Soit $x \geqslant -1$. On a :

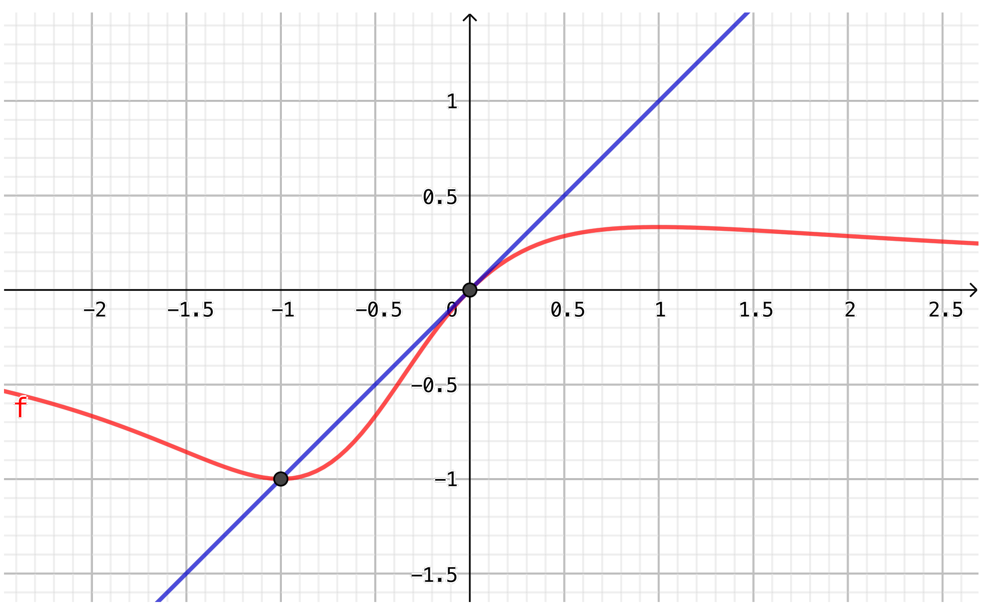
$$f(x) - x = \frac{x}{1 + x + x^2} - x = x\left(\frac{1}{1 + x + x^2} - 1\right) = x\frac{-x - x^2}{1 + x + x^2} = \frac{-x^2(1 + x)}{1 + x + x^2}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x + x^2 > 0$, on a donc :

$$\forall x \in [-1, +\infty[,\ f(x) - x \leqslant 0 \Longleftrightarrow f(x) \leqslant x$$

On en déduit donc que, sur l'intervalle $[-1, +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située en-dessous de la droite d'équation $y = x$ (la tangente (T)).

5. Pour aller un peu plus loin l'étude précédente, le signe de $f(x) - x$ est le même que $-(1 + x)$.



Partie B

1. Pour $n \geqslant 1$, on a $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}$.

   Comme $n+1+\frac{1}{n} \geqslant n+1 > 0$, par passage à l'inverse, on a :

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

2. - On a bien $0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.
   - Soit $n \geqslant 1$. Supposons qu'on ait $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
     La fonction f est croissante sur $[-1,1]$, donc sur $[0,1/n]$, donc :

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right)$$

     Donc on obtient :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   - Par récurrence, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.

3. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit par théorème d'encadrement que la suite (u_n) est convergente, de limite 0.

4.
```
function y=f(x)
        y = x/(1+x+x^2)
endfunction
u = 1
n = 1
while u > 1/1000
        u = f(u)
        n = n+1
end
disp(n)
```

Partie C

1. - Si $v_1 = -2$, on a $v_2 = \frac{-2}{1+(-2)+4} = \frac{-2}{3} \in [-1,0]$.
   - Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
     Comme f est croissante sur $[-1,0]$, on a $f(-1) \leqslant f(v_n) \leqslant f(0)$, autrement dit $-1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 0$.
   - Par récurrence, on a bien : $\forall n \geqslant 2,\ -1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

2. Pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n \leqslant 0 \quad \text{car } \forall x \in [-1,0], f(x) \leqslant x \text{ et } v_n \in [-1,0]$$

   Ainsi, la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

3. La suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est donc décroissante (à partir du rang 2), et minorée par -1 (à partir du rang 2), donc (v_n) est convergente.
4. D'après le graphique obtenu, il semblerait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -1$.
5. (a)

$$f(x) = -1 \iff \frac{x}{1+x+x^2} = -1 \iff x = -1-x-x^2 \iff x^2+2x+1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x = -1$$

L'équation admet donc une unique solution : -1.

(b) Supposons qu'il existe un rang $n \geqslant 1$ tel que $v_n = -1$.
Alors on aurait $f(v_{n-1}) = -1$, donc on aurait $v_{n-1} = -1$ d'après (a).
Mais alors on aurait $f(v_{n-2}) = -1$ d'après (a), donc $v_{n-2} = -1$.
En réitérant ce raisonnement, on obtient nécessairement que $v_n = v_{n-1} = \cdots = v_2 = -1$, ce qui est absurde, puisque $v_2 \neq 1$.
Ainsi, on a nécessairement $\forall n \geqslant 1,\ v_n \neq 1$.

EXERCICE 3

1. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et une densité peut être par exemple la fonction f donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a $E(X) = \dfrac{1}{a}$ et $V(X) = \dfrac{1}{a^2}$.

2. (a) L'événement $[T > x]$ se réalise si le client C attend au moins x minutes, donc si et seulement si les clients A et B ont eu chacun une opération qui a durée au moins x minutes :

$$[T > x] = [X > x] \cap [Y > x]$$

(b) Par indépendance des variables X et Y, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(T > x) = P([X > x] \cap [Y > x]) = P(X > x)P(Y > x)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(T > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-ax}e^{-bx} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(c) On en déduit que pour tout réel x :

$$P(T \leqslant x) = 1 - P(T > x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-(a+b)x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît une loi exponentielle de paramètre $a + b$.

(d) On veut ici : $P_{[T>2]}(T>5) = \dfrac{\mathbb{P}([T>2]\cap[T>5])}{\mathbb{P}(T>2)} = \dfrac{\mathbb{P}(T>5)}{\mathbb{P}(T>2)} = \dfrac{e^{-5(a+b)}}{e^{-2(a+b)}} = e^{-3(a+b)}$.

3. (a)

```
function T = simul(a,b)
        X = grand(1,10000,'exp',1/a)
        Y = grand(1,10000,'exp',1/b)
        T = X
        for k = 1:10000
                if Y(k) < X(k) then
                        T(k) = Y(k)
                end
        end
endfunction
a = input('a :  ')
b = input('b :  ')
T = simul(a,b)
```

(b) On utilise plutôt l'instruction `histplot(0:max(T),T)`, qui est plus adaptée aux variables aléatoires continues (`bar` fournit un diagramme en bâton, qui est plus adapté aux variables aléatoires discrètes.

4. (a) La fonction `simul2` permet de calculer la fréquence d'apparition de l'événement $[V>2]$.

(b) C'est la loi faible des grands nombres qui permet d'affirmer ce phénomène.

5. (a) En posant pour tout $x \in [0,A]$:

$$\left|\begin{array}{l} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-x} \end{array}\right. , \quad \left|\begin{array}{l} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{array}\right. ,$$

on a par intégration par parties :

$$\int_0^A g(x)dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^A - \int_0^A(-e^{-x})dx = -Ae^{-A} - \Big[e^{-x}\Big]_0^A = 1-e^{-A}-Ae^{-A}$$

(b) On refait une intégration par parties en posant, pour tout $x\in[0,A]$:

$$\left|\begin{array}{l} u(x)=x^2 \\ v'(x)=e^{-x} \end{array}\right. , \quad \left|\begin{array}{l} u'(x)=2x \\ v(x)=-e^{-x} \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\int_0^A xg(x)dx = \Big[-x^2e^{-x}\Big]_0^A + 2\int_0^A g(x)dx = -A^2e^{-A} + 2\left(1-e^{-A}-Ae^{-A}\right)$$

(c) La fonction g est positive et continue sur $\mathbb{R}$ (on a $\lim\limits_{0^+} g = \lim\limits_{0^-} g$).

De plus, comme $\lim_{A\to+\infty} Ae^{-A} = 0$ par croissance comparée, on a d'après (a) :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A g(x)dx = 1$$

On en déduit donc que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut 1.

Comme l'intégrale $\int_{-\infty}^0 g(x)dx$ converge et vaut 0, on a donc bien que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut 1.

(d) $P(V \leqslant 2) = \int_0^2 g(x)dx = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - 3e^{-2}$.
On en déduit que $P(V > 2) = 3e^{-2} \simeq 0,42$.
C'est cohérent avec les résultats Scilab.

(e) D'après (b) sachant que $\lim_{A\to+\infty} A^2e^{-A} = \lim_{A\to+\infty} Ae^{-A} = 0$ par croissance comparée, on voit que :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A xg(x)dx = 2$$

Autrement dit, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = \int_0^{+\infty} xg(x)dx$ converge et vaut 2.
Ainsi, V admet bien une espérance et $E(V) = 2$.

Remarque : on peut aussi simplement mentionner que $V = T + Z$, donc $E(V) = E(T) + (Z)$ par linéarité, et donc $E(V) = 1 + 1 = 2$.

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Avec une moyenne de 11,00 et un écart-type de 5,93, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée. En particulier un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière. Nous conseillons également aux candidats de numéroter toutes les pages sur lesquels ils ont écrit quelque chose, pour faciliter la lecture du correcteur.
  Dans une majorité des copies, les candidats présentent bien leur copie, indiquent clairement les questions abordées ou admises et montrent un souci de bien faire et un certain respect des correcteurs, ce qui dévalorise d'autant plus les quelques candidats qui font tout le contraire.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
  Rares sont les candidats qui admettent explicitement les résultats non établis.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entrainer très régulièrement à faire des calculs.

Cette année spécifiquement, les correcteurs ont relevé de nombreuses erreur dans la manipulation des notions mathématiques, notamment :

- de nombreuses confusion entre égalité et équivalence
- des confusions de définition dont le nom peut ressembler (constante / continue, croissante / continue)
- des problèmes de sens dans les opérations de calcul élémentaires (parenthèses, signes, ...). Il est étonnant que même les étudiants semblant avoir acquis les bases de calcul se dispensent de façon systématique des parenthèses, rédigeant de ce fait des démonstrations fausses
- des difficultés dans la simplification de fractions, de puissances, qui sont particulièrement préjudiciables.
- toute tentative de résolution d'inéquation semble vouée à l'échec. Le passage entre deux inéquations équivalentes n'est quasiment jamais justifié ou compris.
- la résolution des équations est mieux traitée mais peut souvent poser problème également.

Rappelons enfin que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, ces questions ne sont presque jamais abordées ou souvent de manière incorrecte. Même si on voit une amélioration d'année en année, il semblerait qu'un grand nombre d'étudiants ne comprennent pas le programme qu'ils complètent souvent partiellement grâce à des légers automatismes.

Cette année spécifiquement, de très nombreuses copies (environ un quart des candidats) étaient presque vides. Ce phénomène est nul doute imputable à la crise sanitaire traversée, de nombreux candidats n'ayant malheureusement pas pu bénéficier de conditions propices au travail à domicile. Nous considérons donc que ceci a été inhabituel et ne devrait pas se reproduire sur les sessions prochaines si un autre confinement général n'est plus d'actualité.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Partie A

1. Cette question est traitée dans de nombreuses copies, mais quasiment jamais correctement.
   Remarquons que la condition « `k=1:n` » est parfois écrite « `k=1;n` ».
2. Très peu de réponses complètement correctes sur cette question. Il est dommage que les candidats ayant buté sur la démonstration initiale n'aient pas profité de la première partie de la question afin de répondre à la seconde.
   Dans un certain nombre de copies, la relation $s_n = 8(u_n + u_{n-1})$ apparaît, mais les relations $s_{n+1} = 8s_n$ ou $s_n = 8s_{n-1}$ sont quasiment toujours absentes. La formule donnant le terme général d'une suite géométrique est peu connue et, lorsqu'elle est utilisée, les étudiants ne l'adaptent pas au contexte de l'exercice (notamment en confondant u_0 et s_0).
3. (a) On lit parfois des raisonnements par récurrence assez étranges, ou des calculs parfois très compliqués qui tournent en rond pour finalement aboutir à l'égalité attendue.
   (b) Cette question est traitée par environ la moitié des candidats avec une gestion aléatoire des parenthèses.
4. (a) Seule une moitié des candidats reconnaît ici la somme des n premiers termes d'une suite géométrique. La formule de cette somme n'est pas toujours connue, alors que c'est une simple formule du cours. Un certain nombre affirme que cette somme est télescopique ou alternée et vaudrait alors 0. Dans cette question, comme dans les précédentes, la manipulation des parenthèses et des puissances pose problème.
   (b) Question en général bien traitée par une majorité. Cependant, trop peu précisent que $v_0 = 0$.
   (c) Cette question est peu abordée, et rarement est remarqué le lien avec les question a et b.
   Le calcul de $\dfrac{1}{(-1)^n}$ s'est révélé être un obstacle insurmontable chez de nombreux candidats.

Partie B

1. Cette question est souvent et correctement traitée par les candidats. On voit cependant un nombre non négligeable de candidats qui pensent qu'il s'agit de résoudre l'équation $x^2 - 7x - 8 = 0$.
2. De nombreux candidats n'ont aucun scrupule à écrire $\dfrac{M-7I}{8}$ au lieu de $\dfrac{1}{8}(M-7I)$ ou encore $\frac{1}{8}M - 7I$.
   Le fait que la matrice M admette un polynôme annulateur semble suffire à d'autres pour pouvoir conclure à son inversibilité. Dans de nombreuses copies, on voit des tentatives de réponse utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan.

3. (a) $M^0 = I$ par théorème au lieu de par convention.

   Pour certains $M^0 = \begin{pmatrix} 2^0 & 3^0 & 3^0 \\ 3^0 & 2^0 & 3^0 \\ 3^0 & 3^0 & 2^0 \end{pmatrix}$, il devient alors compliqué de prouver l'égalité demandée.

   (b) Certains affirment que $a_1 = 1$ et $b_1 = 2$.D'autres obtiennent le résultat après un long calcul matriciel puis par identification.

   (c) De nombreux candidats croient ici nécessaire de faire une récurrence.
   La relation entre a_{n+1}, b_{n+1} et a_n et b_n est très compliquée à obtenir. Certains indiquent alors que a_{n+1} est une matrice et non un réel, ce qui souligne de grosses erreurs de compréhension. Un certain nombre de candidats ne semblent pas avoir compris que c'est à eux de poser a_{n+1} et b_{n+1}.

   (d) L'initialisation était toujours incomplète et l'hérédité n'a été traitée correctement que dans de rares copies.

Partie C

1. Même si beaucoup ont pensé à ce que la somme devait faire 1, ils en ont conclu que $\beta = 1$, ou $\beta = 24$ ou encore $\beta = 48$. Il est également dommage qu'un grand nombre de candidats attribue directement une valeur à β sans aucune justification.
2. Peu citent la loi uniforme, alors même que leurs lois et espérances sont correctes. L'énoncé signalait bien pourtant de reconnaître la loi de X et Y.
3. (a) On lit dans une immense majorité $\mathrm{E}(X, Y)$ au lieu de $\mathrm{E}(XY)$. À ce détail près, la formule de la covariance et de l'espérance du produit est en général bien connue, mais les calculs sont plus rarement corrects.

   (b) Le lien a bien été compris. Certains reviennent à la définition en regardant $P([X = 1] \cap [Y = 1])$.

Exercice 2

Partie A

1. Certains écrivent $\Delta \leqslant 0$ avant de conclure.
   Un nombre non négligeable de candidats ne répondent pas correctement. En particulier le raisonnement suivant est souvent rencontré : $x^2 = -x - 1$ or $-x - 1 < 0$ donc il n'y a pas de solution.
2. Cette question a souvent été mal traitée. Outre les erreurs de calcul du type « $\dfrac{x}{x^2 + x + 1} = \dfrac{x}{x^2} + \dfrac{x}{x} + \dfrac{x}{1}$ », trop de candidats citent les « croissances comparées » avant de conclure à des valeurs erronées pour ces limites ! Un certain nombre d'étudiants ne font pas de tentative de justification et se contentent de donner les limites, parfois fausses ; il devient alors impossible de comprendre le raisonnement. Rappelons enfin que toutes les écritures faisant intervenir des opérations avec ∞ ou des divisions par 0 sont à proscrire.
3. Pour un nombre non négligeable de candidats le tableau de variations de la fonction f ne découle pas du calcul de l'expression puis de l'étude du signe de la fonction dérivée f', mais parfois du signe de f.
   En général l'expression de la dérivée d'un quotient est bien connue, mais parfois mal appliquée ou avec des erreurs de calculs, ce qui rend l'expression finale de $f'(x)$ incorrecte.
   On rappelle que la fonction carré n'est pas linéaire ainsi $(1 + x + x^2)^2 \neq 1 + x^2 + x^4$.
4. (a) De nombreux candidats écrivent « $T = f'(a)(x - a) + f(a)$ »ou juste « $f'(a)(x - a) + f(a)$ », ce qui ne rapporte bien entendu aucun point.

(b) Beaucoup font correctement le calcul de $f(x) - x$, mais ne justifient pas correctement le signe de l'expression obtenue.Des candidats confondent interprétation graphique et représentation graphique.

5. Cette question est peu traitée, et quand elle est fait, très peu de figures sont cohérentes, notamment en 0 : la tangente ne passe pas par l'origine, ou est horizontale, ou n'est même pas tangente à la courbe.

Partie B

1. La première partie de cette question est souvent bien traitée, alors que la deuxième est souvent affirmée sans démonstration.

   L'expression de $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ demandée est souvent obtenue au prix de calculs pénibles.

2. La rédaction de la récurrence a été parfois malmenée.

   En particulier, l'hypothèse de récurrence est parfois confondue avec la proposition universelle qu'il s'agit de démontrer. De nombreux candidats indiquent au début de la question qu'ils montreront par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$, mais ne précisent pas l'hypothèse de récurrence lors de l'étape d'hérédité. Remarquons que dire « $\mathcal{P}(n)$ est vraie » sans donner $\mathcal{P}(n)$ à un moment ou à un autre ne sert pas à grand chose.

   Même lorsque l'hypothèse de récurrence est donnée, la variable n n'est pas toujours fixée.

   Si la croissance de f est parfois invoquée lors de l'hérédité, il n'est jamais précisé qu'elle a lieu sur l'intervalle $[-1, 1]$

   Il est quand même dommage que lorsque l'initialisation est effectuée pour $n = 0$ pour de nombreux candidats, l'écriture « $\dfrac{1}{0}$ » ne les gêne pas le moins du monde.

3. Certains pensent devoir utiliser le théorème de la limite monotone, de façon à justifier la convergence qu'ils ne voient pas comme pouvant être déduite, en même temps que la limite, du théorème des gendarmes).Dans l'utilisation du théorème d'encadrement, certains commencent par donner une inégalité sur les limites avant de préciser l'existence de la limite de la suite (u_n).

4. Cette question est souvent traitée, mais de manière complètement aléatoire. L'erreur la plus flagrante est la confusion de la condition du `while` : confusion entre « tant que » et « jusqu'à ce que ».

Partie C

1. Peu de candidats voient qu'il faut initialiser pour $n = 2$.On lit dans de nombreuses copies que : $-1 \leqslant -2 \leqslant 0$.

2. Les candidats justifiant que $v_n > -1$ pour pouvoir utiliser l'inégalité ont été rarissimes.

3. Si le théorème de la limite monotone est bien identifié, ce n'est pas toujours le cas du minorant.

4. Étrangement, peu de candidats regardent cette question pourtant immédiate. On lit quelques valeurs limites étranges comme 11 ou $+\infty$ ou encore $(1, 11)$.

5. (a) Cette question élémentaire est peu réussie. L'identité remarquable $1 + 2x + x^2 = (1 + x)^2$ n'est pas toujours reconnue, même par les meilleurs candidats. Certains trouvent la solution par lecture du tableau de variations, même si la rédaction est incomplète pour être parfaitement recevable.

   (b) Cette question est difficile, et aucun candidat n'a compris la négation de la phrase « pour tout n, $v_n \neq -1$ ».

Exercice 3

1. Les formules du cours sont bien connues quand elles sont données. On attend cependant des candidats qu'ils utilisent la notation a et non λ, et encore moins un mélange entre ces notations. Certains candidats égarés ont préféré rappeler les définitions générales de fonction de répartition et densité de probabilités plutôt que de s'intéresser à la loi exponentielle.
2. (a) Très peu d'explications ont été réellement convaincantes.
   (b) L'oubli des parenthèses est très fréquent.La séparation en deux cas est rarement faite lors du passage à l'écriture explicite.Il est fréquent de lire des intersection de probabilités, et des calculs assez étranges retrouvent miraculeusement le résultat de la question suivante.
   (c) Beaucoup ont reconnu une loi exponentielle de paramètre « a et b »
   (d) Cette question a été peu traitée et peu comprise. On rencontre un peu de tout comme $P(T < 2)(T > 5)$ ou $P_{(T>2)}(T > 5)$. Rappelons que $(T > 2) \cap (T > 5) \neq (2 < T < 5)$.
3. (a) Peu ont compris ce qu'on faisait dans le programme. La condition `k=1:10000` est parfois écrite `k=1;10000`, les deux autres lignes étant rempliess par les candidats sans réelle compréhension.
   (b) La réponse semble vraiment avoir été donnée de manière aléatoire avec équiprobabilité. YSouvent seule la première ligne est renseignée
4. (a) Beaucoup d'élèves se sont effectivement contentés de suivre l'indication en répondant, paraphrasant l'énoncé, que le programme « renvoie le temps total passé par le client C dans la poste »
   (b) Cette question a été pour moi l'occasion de découvrir une multitude de nouveaux théorèmes, avec des noms amusants parfois.
5. (a) La formule du cours est en général connue. Mais il y a des erreurs de calculs, par exemple l'oubli du signe moins devant e^{-x}. On relève beaucoup de maquillage des calculs pour parvenir au résultat
   (b) Sans l'indication de la méthode à appliquer (cf question précédente), la plupart des candidats n'ont pas le « réflexe » d'utiliser la méthode d'intégration par parties. Parfois cela a été le cas, mais cela a été fait à l'envers, en voulant primitiver $x \mapsto x^2$. On a pu lire à plusieurs reprises : $\int_0^A xg(x)\, dx = x\left(1 - e^{-A} - Ae^{-A}\right)$ ou une erreur plus classique : $\int_0^A x^2 e^{-x}\, dx = \left[-\frac{x^3}{3}e^{-x}\right]_0^A$
   (c) La méthode est bien connue, mais peu mentionnent la croissance comparée. pour le calcul de la limite. Certains candidats confondent les mots continue et constante, ou continue et croissante. Beaucoup de candidats se contentent d'énoncer la condition $\int\limits_{\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = 1$ sans la justifier rigoureusement à partir du résultat donné dans la question 5(a).
   (d) Certains ont recalculé la fonction de répartition sans voir qu'ils avaient déjà le calcul plus haut.
   (e) Ceux qui avaient fait la question (b) ont en général répondu correctement.