ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2018

prépa

3

Mathématiques

Option Technologique

Lundi 16 avril 2018 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 4 pages.

CONSIGNES

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ci dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On pose :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de la matrice M, et préciser les valeurs propres associées.

2. En déduire une matrice P telle que $MP = PD$.

3.(a) Vérifier que $X^3 + X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de P.

(b) En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}.

4. Soit X une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1}XP$.

(a) Vérifier que : $Y^2 = P^{-1}X^2P$.

(b) Montrer que X vérifie l'équation

$$(*) \quad : \quad X^2 - 4X + I = M$$

si et seulement si Y vérifie

$$(**) \quad : \quad Y^2 - 4Y + I = D.$$

5.(a) Déterminer la matrice Y diagonale vérifiant l'équation $(**)$ et dont les coefficients diagonaux sont tous inférieurs à 2.

(b) En déduire une matrice X solution de l'équation $(*)$.
On explicitera les neuf coefficients de la matrice X.

ECRICOME

EXERCICE 2

Partie I.

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4\ln(x).$$

1. Étudier le sens de variation de g, et vérifier que g admet un minimum sur $]0, +\infty[$ égal à $2(1-\ln(2))$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0, +\infty[$.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

3. Déterminer la limite de f en 0.
   Interpréter graphiquement le résultat.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
6. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (D).
   On montrera en particulier que (D) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A dont on calculera les coordonnées.
7. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
8. (a) Vérifier que pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a : $f''(x) = \dfrac{2\ln(x)-1}{x^3}$.
   (b) Étudier la convexité de f. La courbe $(\mathcal{C})$ possède-t-elle des points d'inflexion ?
9. On donne :
   $$\frac{1}{e} \simeq 0{,}4 \qquad \sqrt{e} \simeq 1{,}6 \qquad f(\sqrt{e}) \simeq 1{,}3 \qquad f'(\sqrt{e}) \simeq 0{,}1.$$
   Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D) dans un même repère orthonormé.

Partie II.

1. Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par :
   $$u(x) = (\ln(x))^2.$$
2. En déduire que $\displaystyle\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2+11}{8}$.
3. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{e^2+11} f(x) & \text{si } x \in [1, e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   est une densité de probabilité.
4. Soit X une variable aléatoire admettant h comme densité.
   (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
   $$\int_1^e \ln(x)dx = 1.$$
   (b) Montrer enfin que X admet une espérance et la déterminer.

EXERCICE 3

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient;
- si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **l'autre** urne;
- si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **la même** urne.

Partie I - Étude de l'urne du n-ième tirage

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U ». Puisque le premier tirage a lieu dans l'urne U, l'événement U_1 est certain : $P(U_1) = 1$.

1. Calculer $P(U_2)$.
2. Donner les valeurs de $P_{U_2}(U_3)$ et de $P_{\overline{U_2}}(U_3)$.
   En déduire $P(U_3)$.

3.(a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, que valent $P_{U_n}(U_{n+1})$ et $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$?

(b) En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n).$$

(c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue α :

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha.$$

(d) Déterminer alors la valeur de $P(U_n)$ en fonction de n.

(e) Calculer $\lim_{n\to+\infty} P(U_n)$.

Partie II - Étude du nombre de boules blanches

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.

2.(a) Donner les valeurs de :

$$P_{[X_1=0]}(X_2 = 0), \quad P_{[X_1=0]}(X_2 = 1), \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) \quad \text{et} \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 2).$$

(b) En déduire la loi de X_2.

(c) Vérifier que $E(X_2) = \dfrac{19}{18}$.

3. On rappelle qu'en Scilab, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,k)` renvoie un entier aléatoire compris entre 1 et k. Recopier et compléter les lignes à pointillés du script Scilab ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire X_2 :

```
function X2=simulation()
     tirage1 = grand(1,1,'uin',1,3)
     if tirage1<3 then
          res1=1
          tirage2=grand(1,1,'uin',1,4)
          if tirage2==1 then res2=1
          else res2=0
          end
     else
          res1=0
          tirage2= ..........
          if tirage2<3 then res2= ..........
          else res2= ..........
          end
     end
     X2=res1+res2
endfunction
```

4. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, déterminer $X_n(\Omega)$.
   Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(X_n = 0)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ième boule s'effectuera dans U.

   On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ième boule s'effectuera dans V.

6. À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4} \times P(X_n = 1) + \frac{2}{3} \times P(X_n = 0) \qquad (R_1).$$

7. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times P(X_n = 1)$.

   Déduire du résultat (R_1), que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

8.(a) Montrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

(b) En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de n.

(c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1)$.

2018

CORRIGÉ

MATHEMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Les vecteurs V_1, V_2, V_3 sont non nuls et vérifient :

$$MV_1 = V_1, \quad MV_2 = 6V_2, \quad MV_3 = -2V_3$$

Ce sont bien des vecteurs propres, V_1 est associé à la valeur propre 1, V_2 est associé à la valeur propre 6, V_3 est associé à la valeur propre -2.

2. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet trois valeurs propres distinctes, donc M est diagonalisable. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice P est inversible et on a $M = PDP^{-1}$, autrement dit $MP = PD$.

3. (a) $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On obtient $P^3 + P^2 + I_3 = 0$, donc $X^3 + X^2 + 1$ est bien un polynôme annulateur de P.

   (b) On en déduit que, $-P^3 - P^2 = I_3 \Longrightarrow P(-P^2 - P) = I_3$, donc P est inversible et :

$$P^{-1} = -P^2 - P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (a) $Y^2 = (P^{-1}XP)(P^{-1}XP) = P^{-1}X(PP^{-1})XP = P^{-1}X^2P$.

   (b)

$$\begin{aligned} X^2 - 4X + I = M &\Longleftrightarrow P^{-1}(X^2 - 4X + I)P = P^{-1}MP \\ &\Longleftrightarrow (P^{-1}X^2P) - 4(P^{-1}XP) + (P^{-1}P) = (P^{-1}MP) \\ &\Longleftrightarrow Y^2 - 4Y + I_3 = D \end{aligned}$$

5. (a) Soit $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ une matrice diagonale. Alors $Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} Y^2 - 4Y + I = D &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 4a + 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - 4b + 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 - 4c + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 1 & = 1 \\ b^2 - 4b + 1 & = 6 \\ c^2 - 4c + 1 & = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - 4a &= 0 \\ b^2 - 4b - 5 &= 0 \\ c^2 - 4c + 3 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \quad \text{ou } a = 4 \quad (\Delta_a = 16) \\ b = -1 \quad \text{ou } b = 5 \quad (\Delta_b = 36) \\ c = 1 \quad \text{ou } c = 3 \quad (\Delta_c = 4) \end{cases}$$

Si on impose que $a \leqslant 2$, $b \leqslant 2$, $c \leqslant 2$, alors :

$$Y^2 - 4Y + I = D \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \iff Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) On sait que $Y = P^{-1}XP$, donc $X = PYP^{-1}$.
On obtient : $PY = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ou $YP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

Partie I.

1. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0, g'(x) = 2x - \dfrac{4}{x} = \dfrac{2(x^2-2)}{x}$.
On en déduit ci-contre le tableau de variations de g sur $]0, +\infty[$.

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	

La fonction g atteint donc son minimum sur $]0, +\infty[$ en $\sqrt{2}$, qui vaut :

$$g(\sqrt{2}) = 2 - 4\ln(\sqrt{2}) = 2 - 4\ln(2^{1/2}) = 2 - 4\frac{1}{2}\ln(2) = 2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2))$$

2. Comme $2 < e$, on a $\ln(2) < \ln(e) = 1$, donc $1 - \ln(2) > 0$. Ainsi, le minimum de g est strictement positif.
On en déduit donc que $\boxed{\forall x > 0, g(x) > 0}$.

3. On sait déjà que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{4} = 0$. De plus, par quotient, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 + \ln(x)}{x} = -\infty$.
Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty}$. La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

4. On sait que par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc par somme, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$.

5. $$f(x) - \left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1 + \ln(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(croissances comparées)}$$
Ainsi, la droite (D) est bien asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

6. On étudie le signe de $f(x) - \left(\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{1 + \ln(x)}{x}$. On a :

$$\frac{1 + \ln(x)}{x} \geqslant 0 \iff 1 + \ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant e^{-1}$$

Sur $]0, e^{-1}[$, $(\mathcal{C})$ est en-dessous de (D). Sur $[e^{-1}, +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (D). Les deux courbes s'intersectent au point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$, et d'ordonnée $\frac{1}{4e}$.

7. La fonction f est dérivable et on a :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{x}x - (1+\ln(x))1}{x^2} = \frac{1}{4} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 4\ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de f.

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $+$
$f(x)$	$\|$ $-\infty \nearrow +\infty$

8. (a) La fonction f' est encore dérivable sur $]0, +\infty[$, puisque $\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\ln(x)}{x^2}$, et on a :

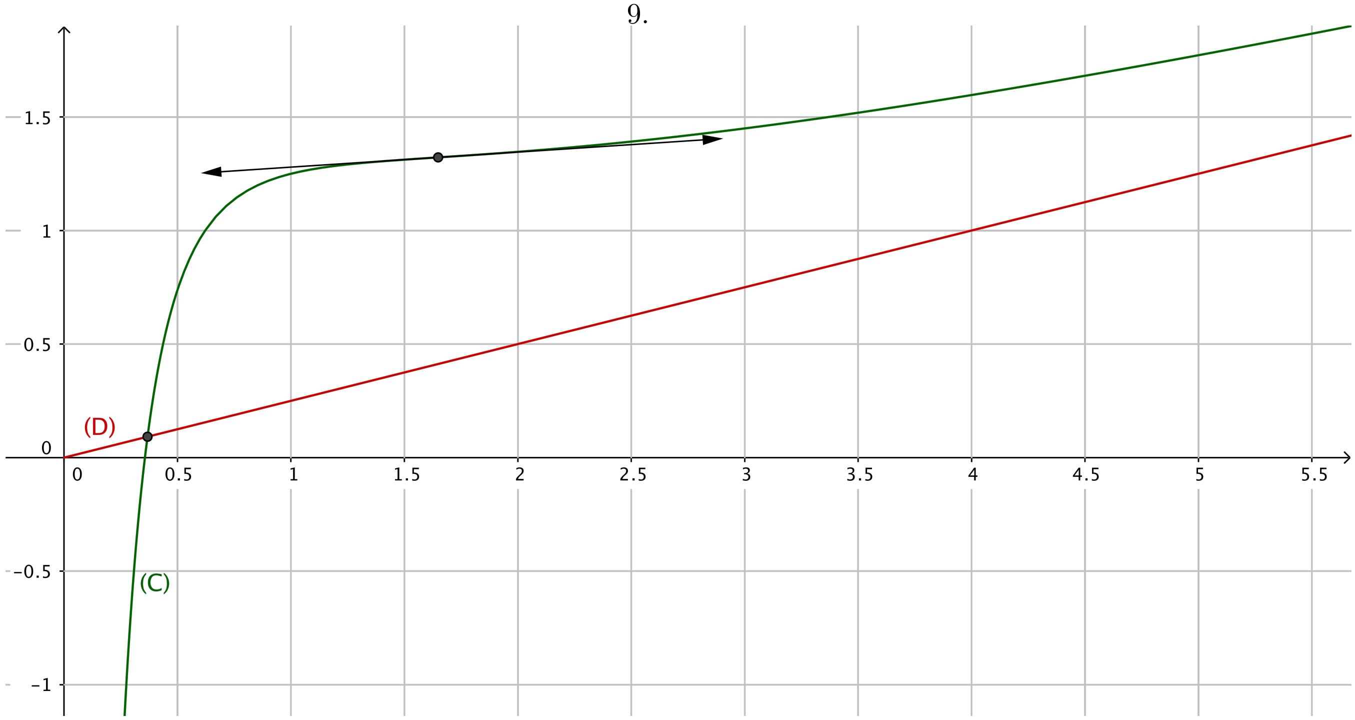
$$\forall x > 0, f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}x^2 - \ln(x)2x}{x^4} = \frac{2x\ln(x) - x}{x^4} = \frac{2\ln(x) - 1}{x^3}$$

(b)

$$f''(x) \geqslant 0 \iff \frac{2\ln(x) - 1}{x^3} \geqslant 0 \iff 2\ln(x) \geqslant 1 \iff \ln(x) \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Sur $]0, \sqrt{e}]$, la fonction f est concave. Sur $[\sqrt{e}, +\infty[$, la fonction f est convexe. La courbe admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

9.



Partie II.

1. La fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0, u'(x)=2\frac{1}{x}\ln(x)$.
2.

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)dx &= \int_1^e \left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{8}+\ln(x)+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e \\ \frac{e^2}{8}&+1+\frac{1^2}{2}-\frac{1}{8}-0-0=\frac{e^2+11}{8}\end{aligned}$$

3. - La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1 et e (f est bien continue sur $[1,e]$). De plus, la fonction h admet bien des limites finies à droite et à gauche en 1 et en e, donc h est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall x\in[1,e], f(x)\geqslant 0$, donc $\forall x\in\mathbb{R}, h(x)\geqslant 0$.
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx=\frac{8}{e^2+11}\int_1^e f(x)dx=1.$

   La fonction h est donc bien une densité de probabilité.
4. (a) On pose :

$$\forall x\in[1,e],\ \left|\begin{array}{l}u(x)=\ln(x)\\ v'(x)=1\end{array}\right.,\ \left|\begin{array}{l}u'(x)=1/x\\ v(x)=x\end{array}\right..$$

Par intégration par parties, on a :

$$\int_1^e \ln(x)dx=\Big[x\ln(x)\Big]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}dxdx=e\ln(e)-\int_1^e 1dx=e-(e-1)=1$$

(b) X admet une espérance car bornée (h est non-nulle sur un segment), et on a :

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx\\ &=\int_1^e x\frac{8}{e^2+11}f(x)dx\\ &=\frac{8}{e^2+11}\int_1^e\left(\frac{x^2}{4}+(1+\ln(x))\right)dx\\ &=\frac{8}{e^2+11}\left(\left[\frac{x^3}{12}+x\right]_1^e+1\right)\\ &=\frac{8}{e^2+11}\left(\frac{e^3}{12}+e-\frac{1}{12}\right)=\frac{2\big(e^3+12e-1\big)}{3\big(e^2+11\big)}\end{aligned}$$

EXERCICE 3

Partie I - Étude de l'urne du n-ième tirage

1. U_2 se réalise si, au cours du premier tirage, on a tiré (dans l'urne U) une boule noire, donc $P(U_2) = \dfrac{1}{3}$.

2. Sachant U_2, on fait des tirages dans l'urne U, donc : $P_{U_2}(U_3) = \dfrac{1}{3}$.
   Sachant $\overline{U_2}$, on fait des tirages dans l'urne V : $P_{\overline{U_2}}(U_3) = \dfrac{1}{4}$.
   Comme $(U_2, \overline{U_2})$ forme un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(U_3) = P(U_2 \cap U_3) + P(\overline{U_2} \cap U_3) = P(U_2)P_{U_2}(U_3) + P(\overline{U_2})P_{\overline{U_2}}(U_3) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3} + \frac{1}{4}.\frac{2}{3} = \frac{5}{18}$$

3. (a) Sachant U_n, on fait des tirages dans l'urne U, donc : $P_{U_n}(U_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.
   Sachant $\overline{U_n}$, on fait des tirages dans l'urne V : $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.

   (b) Comme $(U_n, \overline{U_n})$ forme un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(U_{n+1}) &= P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(\overline{U_n})P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) \\
&= \frac{1}{3}P(U_n) + \frac{1}{4}(1 - P(U_n)) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n)
\end{aligned}$$

   (c) $\alpha = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12}\alpha \iff \dfrac{11}{12}\alpha = \dfrac{1}{4} \iff \alpha = \dfrac{3}{11}$.

   (d) La suite $\left(P(U_n) - \dfrac{3}{11}\right)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(U_n) = \frac{3}{11} + \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(P(U_1) - \frac{3}{11}\right) = \frac{3}{11} + \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$$

   (e) Puisque $-1 < \dfrac{1}{12} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n) = \dfrac{3}{11}$.

Partie II - Étude du nombre de boules blanches

1. On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, et puisqu'on fait un tirage dans l'urne U au premier tirage, on a :
$$P(X_1 = 0) = \frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}$$
X_1 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $2/3$.
2. (a) Sachant $[X_1 = 0]$, on fait le deuxième tirage dans l'urne U, donc :
$$P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) = \frac{2}{3}$$
Sachant $[X_1 = 1]$, on fait le deuxième tirage dans l'urne V, donc :
$$P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) = \frac{1}{4}$$
(b) On a $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
- $P(X_2 = 0) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
- $P(X_2 = 2) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 2]) = P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$
- On en déduit que $P(X_2 = 1) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$.

(c) $E(X_2) = 0.P(X_2 = 0) + 1.P(X_2 = 1) + 2.P(X_2 = 2) = \frac{13}{18} + \frac{2}{6} = \frac{19}{18}$.

3.
```
    else
        res1=0
        tirage2=grand(1,1,'uin',1,3)
        if tirage2<3 then res2=1
        else res2= 0
        end
    end
```

4. Pour tout $n \geqslant 1$, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. En effet, il est possible de n'avoir tiré que des boules noires, ou que des boules blanches, et toutes les situations intermédiaires sont possibles.
$[X_n = 0]$ se réalise si et seulement si on obtient n fois de suite une boule noire (donc toujours dans l'urne U), donc par probabilités composées on en déduit que :
$$P(X_n = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
5. A chaque tirage d'une boule blanche, on change d'urne. Si on a changé un nombre pair de fois d'urne, alors la $(n + 1)$-ième boule est bien tirée dans l'urne U.
6. En utilisant le SCE $([X_n = k])_{k\in[\![0,n]\!]}$, on a :
$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = 1) \\ &= P(X_n = 0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) \quad \text{(les autres probas conditionnel} \\ &= \frac{2}{3}P(X_n = 0) + \frac{3}{4}P(X_n = 1) \end{aligned}$$

En effet, si $[X_n = 0]$ est réalisé, le $(n+1)$-ième tirage se fait dans l'urne U, donc $P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$ (proba de tirer une boule blanche dans U). De même, si $[X_n = 1]$ est réalisé, le $(n+1)$-ième tirage se fait dans l'urne V, donc $P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4}$ (proba de tirer une boule noire dans V).

7. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} P(X_{n+1} = 1) \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{2}{3}P(X_n = 0) + \frac{3}{4}P(X_n = 1)\right) \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n} P(X_n = 1) + \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\ &= u_n + \frac{8}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n} \end{aligned}$$

8. (a)
   - On a $u_1 = \frac{4}{3}P(X_1 = 1) = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9} = \frac{8}{5}\left(1 - \frac{4}{9}\right)$.
   - Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$. Alors :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) + \frac{8}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)$$

   - Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n \geqslant 1, u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$.

   (b) On a donc : $P(X_n = 1) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u_n = \frac{8}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{8}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

   (c) Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et $0 < \frac{1}{3} < 1$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = 0$.

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entrainer très régulièrement à faire des calculs;

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, très peu de candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 10,99 et un écart-type de 5,92, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice de calcul matriciel était de forme classique sur ses premières questions, utilisant des notions rassurantes que les candidats sont habitués à traiter dans les sujets étudiés pendant l'année. La fin de l'exercice, plus originale et demandant un certain recul face aux raisonnements mis à jeu a été moins abordée, mais pourra fournir un bon exercice de révisions pour les futurs candidats.

1. Les candidats ont en général bien en tête la méthode et calculent les produits MV_k et précisent bien les valeurs propres associées, mais ne pensent pas souvent à vérifier que les vecteurs V_k ne sont pas nuls pour affirmer que ce sont des vecteurs propres.
2. Cette question est classique également en ECT. On attend ici que les candidats juxtaposent les vecteurs propres V_1, V_2, V_3 proposés précédemment pour construire la méthode P et qu'ils vérifient alors que la relation est bien vérifiée.
3. (a) Cette question nécessitait que les candidats aient bien obtenu la bonne matrice P précédente. Les candidats maladroits ayant par exemple choisi une autre matrice P ne pouvaient alors pas obtenir la bonne relation ici, et n'ont alors pas été pénalisés par le barème de notation.

CONCOURS ECRICOME PREPA

(b) Les candidats ont en général pu aborder facilement cette question en interprétant correctement la question précédente, même si les calculs n'avaient pas été abouti à la question précédente.
Certains candidats maladroits n'ont pas compris le lien et ont voulu calculer P^{-1} en reprenant la matrice P et effectuer des opérations par pivot de Gauss. Il s'agit ici de bien lire l'énoncé et l'expression « En déduire »aurait dû indiquer la méthode à suivre.

4. (a) Cette question a été bien réalisée par une majorité des candidats. Certains candidats, peut-être habitués à une autre formulation dans les épreuves des années précédentes, ont montré par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ Y^n = P^{-1}X^nP$, puis ont pris le cas particulier où $n = 2$. C'était bien entendu maladroit et inutile ici.
   (b) Les candidats ont souvent réussi à montrer un « sens » de la démonstration attendue, mais peu ont compris qu'il fallait ici raisonner par équivalence, ou par double implication. Ce genre de démonstration est difficile pour les candidats de la filière.
5. (a) Les candidats n'ont pas forcément bien compris la question attendue ici. Il s'agissait de déterminer une matrice diagonale qui soit solution, et cela s'obtenait en résolvant des équations du second degré. Souvent les calculs ont rebuté les candidats qui ne sont pas forcément allés jusqu'au bout de la résolution.
   (b) Ici encore, les candidats ont souvent été bloqués par les calculs et ne sont pas allés au bout de la résolution, soit par manque d'idée sur la méthode à poursuivre, soit par manque de temps.

Exercice 2

Cet exercice démarrait avec une étude de fonctions, ainsi qu'un tracé de courbe, pour appliquer les résultats obtenus à l'étude d'une variable à densité. La première partie constitue un exercice classique, qui devrait être un objectif à atteindre pour tout candidat sérieux de la filière technologique. À défaut d'avoir été bien traité par tous les candidats cette année, il fera un excellent sujet d'entraînement pour les années à venir.

Partie I

1. L'étude de la fonction g a été bien réalisée par une majorité des candidats. Le minimum a souvent été bien déterminé, mais parfois la simplification des logarithmes a été trop difficile à obtenir pour quelques candidats.
2. On attendait ici comme justification que $\ln(2) \leqslant 1$ pour obtenir le signe de g sur $]0, +\infty[$.
3. La limite de f en 0 a souvent été bien faite, ne posant pas de réel problème. L'interprétation graphique est cependant souvent imprécise et on lit des réponses un peu fantaisistes.
4. Ici, autant la limite de $\dfrac{x}{4}$ était facile. Il fallait alors soit dire que le deuxième terme était positif et conclure par comparaison, soit déterminer la limite de $\dfrac{1+\ln(x)}{x}$, mais alors dans ce cas-là il faut citer précisément les croissances comparées.
5. La méthode est acquise pour environ la moitié des candidats, l'autre moitié n'abordant pas la question.
6. Ici encore, certains candidats n'abordent pas la question, peut-être ne comprenant pas quelle méthode employer.

7. Le calcul de la dérivée a été généralement bien effectué. Cependant, il est dommage qu'il y ait des candidats qui obtiennent des résultats incohérents et ne le soulignent pas. Par exemple trouver une fonction croissante sur $]0, +\infty[$, mais avec une limite de $+\infty$ en 0^+ n'est pas cohérent. Cela devrait alerter les candidats sur la présence d'une erreur, qu'ils devraient alors a minima signaler sur leur copie.
8. (a) Le calcul de la dérivée seconde nécessitait déjà d'avoir obtenu la bonne dérivée. Il est alors inutile de transformer les calculs pour obtenir miraculeusement le résultat escompté. Le résultat était surtout donné pour pouvoir avancer dans l'exercice et traiter la question suivante.
   (b) L'étude de la convexité est connue par les candidats. Le problème est souvent plutôt survenu sur la résolution de l'inéquation demandée.
9. Il est important ici que les candidats obtiennent un résultat cohérent avec les informations qu'ils ont pu acquérir sur les questions précédentes. On attend un tracé clair, précis et soigné. La question est généreusement notée dans le barème, donc nous ne pouvons qu'encourager les candidats à traiter de manière plus approfondie les questions des tracés de courbe.

Partie II

1. La dérivée de la fonction u a été parfois mal calculée. Pour les candidats qui ont du mal avec la notion de composée, ils devraient se rendre compte que $u(x) = \ln(x) \times \ln(x)$, puis appliquer la règle de dérivation d'un produit.
2. Il fallait ici faire le lien entre la fonction u' et la fonction f afin de pouvoir calculer facilement l'intégrale $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$.
3. Cette question a été bien traitée par les candidats, qui connaissent bien la définition d'une densité de probabilité. Pour la continuité par morceaux d'une fonction qui est continue sur un segment, et nulle ailleurs, on peut se permettre de justifier la continuité par morceaux de manière concise, certains candidats écrivant une page entière de calculs pour déterminer les limites à droite et à gauche.
4. (a) Lorsque l'exercice demande explicitement une intégration par parties, on attend que la formule du cours soit clairement écrite dans la copie, ce que les candidats font souvent de manière spontanée.
   (b) La méthode pour déterminer l'espérance d'une variable à densité est bien connue, même si elle manque parfois de rigueur chez les candidats.

Exercice 3

Partie I

1. Cette question a été bien traitée par les candidats.
2. Nécessitant une bonne compréhension de l'exercice, les candidats ont en général bien compris comment déterminer les probabilités conditionnelles. Il fallait alors utiliser la formule des probabilités totales pour achever la question correctement.
3. (a) Les candidats ayant bien répondu à la question 2 ont souvent fait de même ici.
   (b) Là encore, il fallait utiliser la formule des probabilités totales. Dans ce cas, on attend un appel explicite au système complet d'événements utilisé.

(c) Cette équation pourtant élémentaire, a été malmenée par les candidats. La gestion des fractions s'est révélée difficile pour beaucoup, et on a alors vu de nombreuses erreurs de calculs.

(d) La méthode pour déterminer une suite arithmético-géométrique, pourtant bien détaillée ici, a été laborieusement mise en place dans beaucoup de copies. Cet exercice pourtant élémentaire doit être à la portée de tout candidat sérieux du concours.

(e) Lorsqu'on a une limite d'une suite de type q^n, on attend explicitement le fait que $-1 < q < 1$ pour justifier la convergence vers 0 de la suite.

Partie II

1. Certains étudiants ne pensent pas spontanément à déterminer $X_1(\Omega)$ quand on leur demande la loi de X_1. Mais les calculs explicites de $P(X_1 = 0)$ et $P(X_1 = 1)$ ont alors été bien réalisés, les candidats ayant bien compris le contexte de l'exercice.
2. (a) À part certains candidats maladroits, les probabilités conditionnelles ont été bien déterminées, les candidats comprenant bien le contexte de l'exercice.

   (b) Comme à la question 3(b) de la partie 1, on attend un calcul clair des probabilités totales en citant le système complet d'événements utilisé.

   (c) L'espérance de X_2 a été dans l'ensemble bien calculée.
3. Les questions d'informatique en Scilab sont une attente du programme actuel en ECT. Il s'agissait ici de compléter ici un programme à trous. Les candidats ont tout intérêt à s'investir un peu dans l'enseignement du Scilab pendant leur formation, car les questions au concours sont très bien rémunérées et sont rédigées de manière à être accessibles par tout candidat sérieux.
4. Les candidats qui ont abordé cette question ont en général bien répondu.
5. Ici, on demande une explication claire, en français correct. Cette question a surtout pour but d'assurer la compréhension des candidats sur le sujet, et constitue surtout une aide pour la suite.
6. Encore une fois, on attend un appel au bon système complet d'événements ici, qui n'est pas uniquement $([X_n = 0], [X_n = 1])$ comme l'ont proposé plusieurs candidats.
   Certains candidats se sont contentés d'expliquer les termes apparaissant dans la relation. Même si cela démontre d'un recul face à l'exercice, cela ne garantit pas la totalité des points à obtenir, la formule des probabilités totales étant clairement demandée ici.
7. Les candidats se sont parfois trompés dans les calculs des puissances, et n'ont pas réussi à obtenir la relation demandée. La question n'était pas bloquante, les candidats ont donc souvent avancé.
8. (a) C'était le seul véritable raisonnement par récurrence du sujet de cette année. On attendait donc que la rédaction soit précise et rigoureuse. C'était en général le cas, les candidats investissant clairement un temps à la compréhension des exercices de récurrence durant leur formation.

   (b) Il fallait ici bien faire le lien avec la question 7, ce qui a souvent été bien fait par les candidats.

   (c) On a vu ici des erreurs, les candidats ne simplifiant pas assez les expressions obtenues à la question précédente, et maintenant simultanément des $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ et des $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$. Comme à la question 3(e) de la Partie 1, on attend clairement une justification de la convergence (ou non) des suites géométriques présentes.