ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2016

prépa

3

Mathématiques

Option Technologique

Mercredi 20 avril 2016 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 4 pages.

CONSIGNES

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, vous devez le restituer aux examinateurs à la fin de la session ou le laisser sur table selon la consigne donnée dans votre centre d'écrits.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On définit également trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) par leurs premiers termes $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ v_{n+1} & = 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ w_{n+1} & = -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{cases}$$

1. *Puissances successives de la matrice A*
   (a) Calculer $(A - I)(A - 2I)(A - 3I)$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
   (b) Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est obtenue en juxtaposant trois vecteurs-colonnes qui sont vecteurs propres de A. Préciser pour chacun la valeur propre correspondante.
   (c) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (d) Vérifier que la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ satisfait la relation $AP = PD$ et en déduire l'expression de A en fonction des matrices P, D et P^{-1}.
   (e) Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (f) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. *Obtention de l'expression des termes des trois suites récurrentes*
   (a) Vérifier que l'on a la relation : $C = AC + B$.
   (b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C - A^n C$.
   (d) En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2

Partie I : Etude de fonction

Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = (x^3 + x^2 - x - 1)e^{-x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère du plan.

1. Soit P le polynôme de degré deux, défini pour tout réel x par $P(x) = x^2 - 2x - 3$.
   Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. (a) Montrer que $g'(x) = -xP(x)e^{-x}$ pour tout réel x.
   (b) Dresser le tableau de variation complet de g.
   (c) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
5. Construire $\mathcal{C}$ ainsi que ses tangentes horizontales dans un repère orthogonal d'unités : 1cm sur (Ox) et 2cm sur (Oy). On prendra $\dfrac{32}{e^3} \simeq 1,6$.

Partie II : Intégrales et probabilités

1. On pose $I_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ et pour tout entier naturel non nul, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.

   (a) Montrer que I_0 est une intégrale convergente égale à $\dfrac{1}{e}$.

   (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $M \geqslant 0$:

$$\int_1^M x^{n+1}e^{-x}dx = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1)x^n e^{-x}dx$$

   (c) En raisonnant par récurrence à l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n converge.

   (d) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

   (e) Calculer I_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$. On admet que $I_4 = \dfrac{65}{e}$, $I_5 = \dfrac{326}{e}$.

   (f) Écrire un script Scilab qui, demandant à l'utilisateur un entier strictement positif `n`, calcule et affiche la valeur de I_n.

2. Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{e}{18}g(x) & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$, où g est la fonction définie dans la partie I.

   (a) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire que l'on notera Z.

   (b) Justifier que la variable Z admet une espérance, puis la calculer.

   (c) Justifier que la variable Z admet une variance, puis vérifier que :

$$V(Z) = \frac{296}{81}$$

EXERCICE 3

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : deux boules sont bleues, deux boules sont rouges, deux boules sont jaunes. On effectue une succession de tirages de deux boules successivement et sans remise dans cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules sont de la même couleur, elles sont définitivement sorties de l'urne,
- si les deux boules sont de couleurs différentes, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) nécessaires pour obtenir une première paire de boules de la même couleur.
On note Y_2 (respectivement Y_3) le nombre de tirages (de deux boules) nécessaires pour obtenir une deuxième (respectivement une troisième) paire de boules de la même couleur, à partir de l'obtention de la première (respectivement de la deuxième) paire de boules de la même couleur.
On remarquera que Y_3 est une variable aléatoire constante et que $Y_3 = 1$.
On admettra que les variables Y_1, Y_2, Y_3 sont indépendantes.
Enfin, on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.
Par exemple, si les résultats successifs sont $(R_1, B_1), (B_1, J_2), (J_1, J_2), (B_1, R_2), (R_1, B_2), (R_1, R_2), (B_1, B_2)$ alors Y_1 prend la valeur 3, Y_2 prend la valeur 3, Y_3 prend la valeur 1 et X prend la valeur 7.

1. *Loi de* Y_1

   (a) Calculer la probabilité d'obtenir une paire de boules de la même couleur lors du premier tirage (de deux boules).

   (b) Justifier que la variable aléatoire Y_1 suit une loi usuelle. De quel(s) paramètre(s) ?
   Vérifier que $E(Y_1) = 5$. Que vaut la variance de Y_1 ?

2. *Loi de Y_2*
   Dans cette question, on suppose que la première paire de boules de la même couleur a été obtenue et retirée de l'urne. Il reste ainsi quatre boules dans l'urne, deux pour chaque couleur restante.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une paire de boules de la même couleur en un seul tirage (de deux boules) ?
   (b) Déterminer la loi de Y_2. Quelle est son espérance ?
   Vérifier que $V(Y_2) = 6$.
3. *Loi de X*
   (a) Quelle relation lie la variable aléatoire X aux variables aléatoires Y_1, Y_2, Y_3 ?
   (b) En déduire que $E(X) = 9$. Que vaut $V(X)$?
   (c) Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Justifier chaque égalité ci-dessous :

$$P(X = k) = P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \sum_{i=1}^{k-2} P(Y_1 = i)P(Y_2 = k - 1 - i)$$

   Indication : On remarquera que :

$$[Y_1 + Y_2 = k - 1] = \bigcup_{i=1}^{k-2} ([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k - 1 - i])$$

   (d) En déduire que :

$$\forall k \geqslant 3, \quad P(X = k) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right]$$

4. *Informatique*
   (a) Compléter ce script SCILAB afin qu'il calcule et affiche les probabilités $P(X = k)$ pour $k \in [\![3, 22]\!]$.

```
for k = 3 : 22
        u(k) = .......................
end
plot(u, '+')
```

   Le graphique obtenu en sortie est présent sur la figure 1 (page suivante).
   Quelle semble être la valeur la plus probable de X ?
   (b) Quelle instruction peut-on écrire dans la Console SCILAB qui affiche les vingt valeurs de la fonction de répartition de X aux points d'abscisses entières comprises entre 3 et 22.

   Le graphique obtenu en sortie est présent sur la figure 2 (page suivante).
   Déterminer graphiquement un réel m tel que $P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m)$.

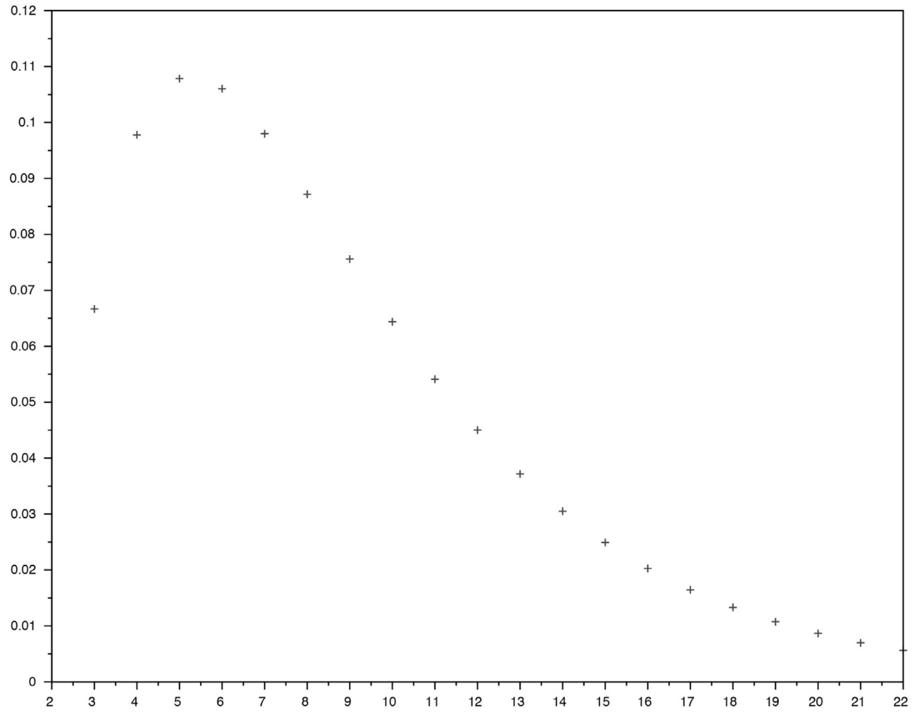

Figure 1

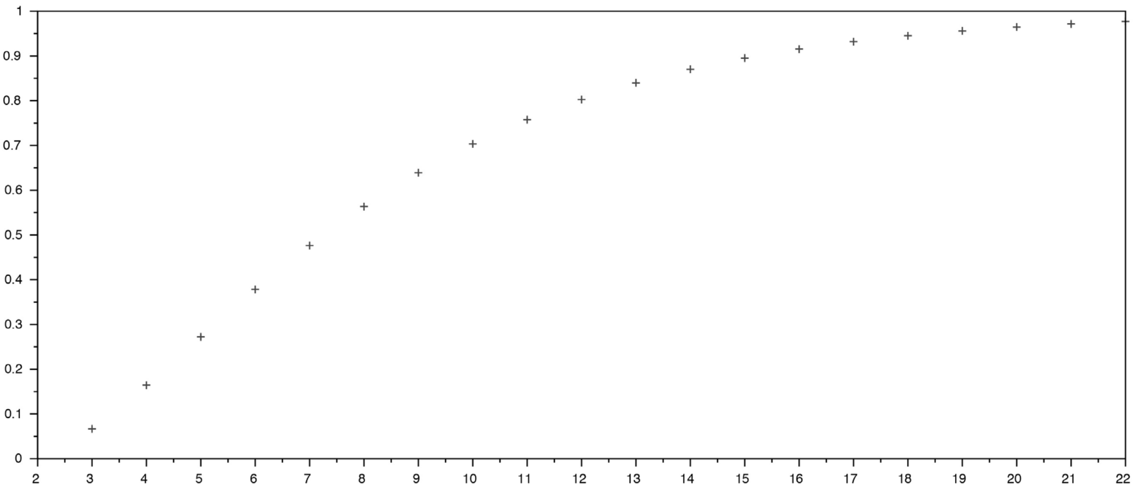

Figure 2

2016

CORRIGÉ

MATHÉMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

VOIE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

OPTION TECHNOLOGIQUE……….

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

ESPRIT GÉNÉRAL

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. (a) On obtient comme calculs :

$$(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (A-2I)(A-3I)=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis $(A-I)(A-2I)(A-3I)=0$.
Puisque le polynôme $P(X)=(X-1)(X-2)(X-3)$ est annulateur de A, les valeurs propres possibles de A sont parmi les racines de ce polynôme, ainsi : $Sp(A)\subset\{1,2,3\}$.

(b) • $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

• $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 2.

• $A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 3.

(c) On trouve $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) On a $AP=PD$, donc $A=PDP^{-1}$.

(e) Montrons par récurrence que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=PD^nP^{-1}$.
On note pour tout entier n : $\mathcal{P}(n)$: « $A^n=PD^nP^{-1}$ ».
• Pour $n=0$ on a $A^0=I$ et $P\times D^0P^{-1}=P\times P^{-1}=I$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
• Pour $n\geqslant 0$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors : $A^{n+1}=A^n\times A=(PD^nP^{-1})(PDP^{-1})=PD^{n+1}P^{-1}$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
• Par récurrence, on a donc bien démontré que : $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=PD^nP^{-1}$.

(f) On en déduit que :

$$A^n=\begin{pmatrix} -1+2^n+3^n & 2-2^n-3^n & 1-3^n \\ -1+3^n & 2-3^n & 1-3^n \\ 2^n-3^n & -2^n+3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

2. (a) On calcule: $AC+B=C$.

(b) On écrit le système matriciellement :

$$X_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\\w_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=AX_n+B$$

(c) Notons pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$: « $X_n=C-A^nC$ ».
• Pour $n=0$, on a $C-A^0C=C-C=0$ et $X_0=0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
• Pour $n\geqslant 0$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :

$$X_{n+1}=AX_n+B=A(C-A^nC)+B=(AC+B)-A^{n+1}C=C-A^{n+1}C$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
• Par récurrence, on a donc bien démontré que : $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n=C-A^nC$.

(d) On en déduit donc que pour $n\in\mathbb{N}$, $X_n=\begin{pmatrix}3^n-2^n\\3^n-1\\2-2^n-3^n\end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

Partie I : Etude de fonction

1. Le discriminant de P vaut $\Delta = 16$, donc P admet deux racines qui sont -1 et 3. On en déduit que $P(x)$ est positif lorsque $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 3$, et que $P(x)$ est négatif lorsque $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

2. En $-\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x^2-x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$ et par ailleurs $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc par produit :
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$
En $+\infty$, on a :
$$g(x) = \frac{x^3}{e^x} + \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}$$
et par croissances comparées, on en déduit que :
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

3. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x,
$$g'(x) = (3x^2+2x-1)e^{-x} + (x^3+x^2-x-1)(-e^{-x}) = \left(-x^3+2x^2+3x\right)e^{-x} = -x(x^2-2x-3)e^{-x}$$
(b) On sait que $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, donc on a :

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$32e^{-3}$	$\searrow$	0

(c) On obtient que $g(1) = 0$. D'après le tableau de variations, on en déduit que :
$$g(x) \leqslant 0 \quad \text{si } x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) \geqslant 0 \quad \text{si } x \geqslant 1$$

4. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation :
$$y = g'(1)(x-1) + g(1) = 4e^{-1}(x-1) + 0 = 4e^{-1}x - 4e^{-1}$$

5.

Partie II : Intégrales et probabilités

1. (a) La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et pour tout $A > 1$, on a :
$$\int_1^A e^{-x}dx = \Big[-e^{-x}\Big]_1^A = e^{-1} - e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$$
Ainsi, l'intégrale $I_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ converge et vaut $1/e$.

(b) Soit $M \geqslant 0$. On pose pour tout $x \in [1, M]$:

$$\left| \begin{array}{l} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{-x} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -e^{-x} \end{array} \right.$$

Par intégration par parties, on obtient que :

$$\begin{aligned} \int_1^M x^{n+1}e^{-x}dx &= \Big[-e^{-x}x^{n+1} \Big]_1^M - \int_1^M (n+1)x^n(-e^{-x})dx \\ &= -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1)x^n e^{-x}dx \end{aligned}$$

(c) On note pour tout entier n : $\mathcal{P}(n)$: « l'intégrale I_n converge ».

- On a démontré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Pour $n \geqslant 0$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors, en reprenant la formule démontrée à la question précédente, en faisant tendre M vers $+\infty$, par croissances comparées, on obtient que :

$$\lim_{M \to +\infty} \int_1^M x^{n+1}e^{-x}dx = -0 + \frac{1}{e} + (n+1)\int_1^{+\infty} x^n e^{-x}dx = \frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

Ainsi, l'intégrale $I_{n+1} = \int_1^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx$ converge et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, on a donc bien démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \text{ converge}$$

(d) (Montré à la question précédente).

(e)
- $I_1 = \dfrac{1}{e} + 1 \times I_0 = \dfrac{2}{e}$.
- $I_2 = \dfrac{1}{e} + 2 \times I_1 = \dfrac{5}{e}$.
- $I_3 = \dfrac{1}{e} + 3 \times I_2 = \dfrac{16}{e}$.

(f)

```
n = input("Donner un entier strictement positif")
    u = 1/(exp(1))
for k = 1:n
    u = 1/(exp(1))+k*u;
end;
disp(u);
```

2. (a) La fonction f est positive (car nulle sur $]-\infty, 1[$ et g est positive sur $[1, +\infty[$), et continue au moins sur $\mathbb{R}$ (elle est nulle sur $]-\infty, 1[$, on a $g(1) = 0$ et g est continue sur $[1, +\infty[$). De plus,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \frac{e}{18}\int_1^{+\infty} (x^3 + x^2 - x - 1)e^{-x}dx \\ &= \frac{e}{18}(I_3 + I_2 - I_1 - I_0) = \frac{e}{18} \times \frac{18}{e} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

(b) La variable Z admet une espérance si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ converge. Or, ici :

$$\int_1^{+\infty} xf(x)dx = \frac{e}{18}\int_1^{+\infty} (x^4 + x^3 - x^2 - x)e^{-x}dx = \frac{e}{18}(I_4 + I_3 - I_2 - I_1) = \frac{e}{18} \times \frac{74}{e} = \frac{37}{9}$$

Donc Z admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}[Z] = \dfrac{37}{9}$.

(c) La variable Z^2 admet une espérance si l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge. Or, ici :

$$\int_1^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{e}{18}\int_1^{+\infty}(x^5+x^4-x^3-x^2)e^{-x}dx = \frac{e}{18}(I_5+I_4-I_3-I_2) = \frac{e}{18}\times\frac{370}{e} = \frac{185}{9}$$

Donc Z^2 admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}[Z^2] = \frac{185}{9}$ et donc Z admet une variance qui vaut :

$$\mathbb{V}[Z] = \frac{185}{9} - \left(\frac{37}{9}\right)^2 = \frac{296}{81}$$

EXERCICE 3

1. (a) Notons A l'événement « on obtient une paire de boules de la même couleur lors des deux premiers tirages ».
En fait cela revient à, une fois que la première boule (quelconque) a été tirée, de choisir dans l'urne restante (avec 5 boules) l'unique boule qui est de la même couleur, on a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5}$$

(b) On a ici une succession d'épreuves succès/échec (le succès étant d'obtenir deux boules de la même couleur), les épreuves se répétant dans des conditions identiques et indépendantes et Y_1 désigne le rang d'apparition du premier succès, donc Y_1 suit une loi géométrique, de paramètre $1/5$. On a donc en particulier $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$ et $\mathbb{V}(Y_1) = \frac{1-\frac{1}{5}}{(\frac{1}{5})^2} = 20$.

2. (a) Notons B l'événement « obtenir une paire de boules de la même couleur en un seul tirage ».
Obtenir une paire de boules de la même couleur en un seul tirage, revient à, lors de la deuxième boule à piocher (parmi les 3 dans l'urne) de piocher exactement celle qui a la même couleur que celle tirée lors de la première pioche :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$$

(b) On a ici encore une succession d'épreuves succès/échec (le succès étant d'obtenir deux boules de la même couleur), les épreuves se répétant dans des conditions identiques et indépendantes et Y_2 désigne le rang d'apparition du premier succès, donc Y_2 suit une loi géométrique, de paramètre $1/3$. On a donc en particulier $\mathbb{E}(Y_2) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ et $\mathbb{V}(Y_2) = \frac{1-\frac{1}{3}}{(\frac{1}{3})^2} = 6$.

3. (a) On a :

$$X = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

(b) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Y_3) = 5 + 3 + 1 = 9$$

Puisque les variables Y_1, Y_2 et Y_3 sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y_1) + \mathbb{V}(Y_2) + \mathbb{V}(Y_3) = 20 + 6 + 0 = 26$$

(c) Puisque $X = Y_1 + Y_2 + Y_3$ et que $Y_3 = 1$, on a :

$$[X = k] = [Y_1 + Y_2 + 1 = k] = [Y_1 + Y_2 = k - 1]$$

donc en passant aux probabilités :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = k - 1)$$

De plus, puisqu'on nous fait remarquer que :

$$[Y_1 + Y_2 = k - 1] = \bigcup_{i=1}^{k-2} ([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k - 1 - i])$$

les événements étant incompatibles, on a :

$$\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \sum_{i=1}^{k-2} \mathbb{P}([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k - 1 - i])$$

et enfin les variables Y_1 et Y_2 étant indépendantes :

$$\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \sum_{i=1}^{k-2} \mathbb{P}(Y_1 = i)\mathbb{P}(Y_2 = k - 1 - i)$$

(d) Puisque Y_1 et Y_2 suivent des lois géométriques, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1-i-1} \left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{15} \times \frac{5}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{4}{5}\right)^{i} \left(\frac{3}{2}\right)^{i} \\
&= \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{6}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{6}{5}\right)^{k-2}}{1 - \frac{6}{5}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \left(\left(\frac{6}{5}\right)^{k-2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right]
\end{aligned}$$

4. *Informatique*

(a)

```
for k = 3 : 22
        u(k)  =  1/2*((4/5)^(k-2)-(2/3)^(k-2))
end
plot(u, '+')
```

D'après le graphique, la valeur la plus probable de X semble être 5.

(b) Il s'agit d'utiliser la fonction `cumsum`. Graphiquement, il semblerait que pour $m = 7$, on ait $P(X \leqslant 7) \simeq 0.5 \simeq P(X \geqslant 7)$.

CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, près des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 10,85 et un écart-type de 5,79, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice d'algèbre avait pour but de vérifier les acquis des candidats sur les calculs matriciels, ainsi que sur leur application à l'étude de suites récurrentes. Il a en général été assez bien abordé par les candidats qui ont su montrer leurs savoirs-faire sur ce type d'exercice. Il est dommage que les nouveautés du programme (valeurs propres, polynômes annulateurs) soient très peu maîtrisés par les candidats.
Certains candidats utilisent des notions hors programme (déterminant d'une matrice d'ordre 3, récurrence forte, ...), ce qui est contraire à l'esprit de l'épreuve et les candidats sont alors sanctionnés sur ces questions.

1. (a) Quelques candidats écrivent les produits de matrices comment ils le feraient sur une feuille de brouillon, et parfois confondent les signes $=$ et $\Leftrightarrow$.
   Le polynôme annulateur n'est pas toujours explicité ou est confondu avec le polynôme de matrice $(A-I)(A-2I)(A-3I)$.
   (b) Beaucoup de candidats ne traitent pas cette question (vecteurs propres) ou se lancent dans la résolution d'un système plutôt que de simplement vérifier que $AV = \lambda V$. Très peu de copies mentionnenent que les vecteurs doivent être non nuls pour être vecteurs propres.
   (c) Le calcul de P^{-1} est généralement bien mené.
   (d) Question bien traitée par une majorité de candidats.
   (e) Question bien traitée par une majorité de candidats.
   (f) Très peu de candidats mentionnent que D est diagonale pour en déduire le calcul de D^n.
2. (a) Question bien traitée par une majorité de candidats.
   (b) Question bien traitée par une majorité de candidats.

(c) Les raisonnement par récurrence ont été souvent bien rédigés, même si certains candidats confondent parfois l'hypothèse de récurrence avec la proposition universelle qu'ils cherchent à démontrer.

(d) Question bien traitée dans les meilleurs copies.

Exercice 2

Cet exercice mêlant étude de fonction, intégration et probabilités continues, a été bien abordé également par les candidats. Il a mis en valeur des erreurs de calcul dans la première partie, et des erreurs de raisonnement dans la seconde. Globalement, les techniques de base de l'analyse sont peu maîtrisées, en particulier le calcul des limites et une méconnaissance des formes indéterminées.

Partie I

1. Certains candidats confondent l'étude du signe avec l'étude des variations, et tentent de dériver $P(x)$.
2. L'invocation du théorème des croissances comparées est parfois « facile »et devrait être plus soigné, utilisé uniquement lorsqu'il est nécessaire. Il est dommage de voir également des candidats transformer l'écriture de $g(x)$ quand bien même la limite étudiée n'est pas une forme indéterminée, ce qui leur fait perdre du temps inutilement.
3. (a) Les candidats écrivent souvent de manière abusive $(x^3 + x^2 - x - 1)'$ dans leurs calculs, ce qui les amène parfois à faire des erreurs de calcul ensuite.
   (b) Souvent, les candidats n'ont pas pris en compte le signe de $-x$, ce qui leur donnait un tableau inversé.
   (c) Question bien traitée par les candidats ayant répondu correctement à la question (b)
4. Les candidats connaissent la formule du cours, mais ne donnent parfois pour unique réponse « $g'(1)(x - 1) + g(1)$ », ce qui n'est pas une équation.
5. Cette question est largement délaissée par les candidats, ce qui est dommage car elle est valorisée dans le barème de l'épreuve. Lorsque la courbe était tracée, les tangentes horizontales n'étaient pas forcément apparentes.

Partie II

1. (a) L'étude d'une intégrale sur un segment n'est pas forcément automatique et plusieurs candidats font le calcul directement sur l'intégrale généralisée.
   (b) La formule d'intégration par parties est globalement bien connue.
   (c) Cette question était difficile, mais même si quelques candidats ne voient pas qu'il s'agit ici de démontrer qu'une « phrase »est vraie pour tout entier n, la majorité en a bien pris conscience et écrit explicitement que « I_n converge »
   (d) Le passage à la limite est rarement proprement effectué, la majorité des candidats confond l'intégrale généralisée et l'intégrale sur $[1, M]$.
   (e) Certaines copies trouvent les bonnes valeurs en partant de la valeur donnée de I_4 et la formule de récurrence.
   (f) La question est rarement traitée, et souvent sans succès lorsqu'elle est abordée.
2. (a) Les candidats ont retenu surtout la condition sur l'intégrabilité de f et mentionnent une notion de continuité (sans forcément la justifier, et confondant continuité avec continuité par morceaux). La positivité est rarement mentionné.
   (b) La question est bien traitée dans les meilleures copies
   (c) Bien traitée par les candidats ayant abordé la précédente.

CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

Exercice 3

Cet exercice a été peu abordé par les candidats, sans doute à cause de sa position en fin de sujet. Les questions d'informatique, nouveauté du programme, ont été négligées par les candidats comme dans l'exercice précédent même pour ce qui portait sur les lectures graphiques. La question 3 était assez technique et de niveau élevé pour les candidats de la voie technologique.

1. (a) Certains candidats proposent des résultats supérieurs à 1. Plusieurs candidats se sentent obligés de justifier une réponse de $1/5$ uniquement pout être en accord avec l'espérance proposée à la question suivante.

   (b) De nombreuses copies concluent que Y_1 suit une loi géométrique sans en préciser le paramètre. La donnée explicite de Y_1 est souvent oubliée, ou donnée de façon erronée, avec par exemple $Y_1(\Omega) = [\![1, n]\!]$

2. (a) voir question 1(a)

   (b) Curieusement, des copies ayant convenablement identifié une loi géométrique à la question 1(b) concluent ici à une loi binomiale.

3. (a) Certains candidats tentent une paraphrase de l'énoncé, en écrivant que $X = Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3$.

   (b) Seules les meilleurs copies invoquent l'indépendance des Y_1.

   (c) Rares sont les mentions de l'indépendance, encore plus celles de l'incompatibilité.

   (d) Aucun candidat ne parvient à répondre complètement à cette question. Les meilleures copies arrivent à une somme de termes d'une suite géométrique mais oublient de multiplier par le premier terme.

4. (a) On remarque énormément d'erreur de priorités dans les opérations (oubli des parenthèses, oubli du signe $*$, les quotients sont parfois écrits avec des traits de fractions, ... De trop rares étudiants essaient de donner la valeur la plus probable de X, soit qu'ils ne prennent pas la peine de bien lire l'énoncé, soit comme en témoignent les nombreuses tentatives ratées, qu'ils éprouvent de réelles difficultés à lire et interpréter un graphique.

   (b) L'instruction `cumsum` ne semble pas avoir été assimilée par les candidats.