

# prépa

# 1

## Mathématiques

Option Scientifique

● **Mardi 16 avril 2019 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*  
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 7 pages.

### **CONSIGNES**

**TOUTES LES COPIES DOIVENT COMPORTER UN CODE-BARRES D'IDENTIFICATION.**

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ÉCRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

## EXERCICE 1

On considère la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

1. Montrer que  $I_n$  est bien défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Calculer  $I_0$ ,  $I_1$  et  $I_2$ .

2.(a) Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$ .

En déduire que la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  converge.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$ .

(c) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$  et  $I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ .

(d) Compléter la fonction I suivante, qui prend en entrée un entier positif  $n$ , afin qu'elle retourne un vecteur  $y$  qui contient les  $2n+2$  premiers termes de la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$ .

```
function y = I(n)
    u = zeros(1, .....);
    u(0) = .....;
    u(1) = .....;
    for k = 1 : n
        .....;
    end
    y = u;
endfunction
```

3.(a) Rappeler un équivalent simple de  $x \mapsto \cos(x) - 1$  et  $u \mapsto \ln(1+u)$  au voisinage de 0.

(b) Montrer que  $n \ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sqrt{n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \cos(n^{-1/4}) \right)^n$ .

(c) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \cos(n^{-2/3}) \right)^n = 1$ .

4.(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt \leq n^{-1/4}.$$

(b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \leq \frac{\pi}{2} \left( \cos(n^{-1/4}) \right)^n.$$

(c) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

5.(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt \geq n^{-2/3} \left( \cos(n^{-2/3}) \right)^n.$$

En déduire la nature de la série de terme général  $I_n$ .

(b) Écrire une fonction en **Scilab** qui prend entrée un entier naturel  $n$  et qui renvoie en sortie le terme de rang  $n$  de la suite des sommes partielles associée à la série  $\sum_{n \geq 0} I_n$ .

6.(a) Montrer que pour tout réel  $t$  de  $] -\pi, \pi[$  :  $\cos(t) + 1 = \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ .

(b) À l'aide du changement de variable  $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ , montrer que :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 1$ .

(c) Montrer que pour tout entier  $n$  :  $\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt$ .

(d) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}$ .

(e) En déduire que la série  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k I_k$  est convergente et déterminer sa somme.

## EXERCICE 2

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On dit qu'un vecteur  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est **symétrique** (respectivement **antisymétrique**)

lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = x_{n+1-i}, \quad (\text{respectivement } x_i = -x_{n+1-i}).$$

On note  $F$  l'ensemble des **vecteurs symétriques** de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $G$  l'ensemble des **vecteurs antisymétriques** de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On note  $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad s_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n + 1 - j, \\ 0 & \text{si } i \neq n + 1 - j. \end{cases}$$

### Partie A

Dans cette partie et **uniquement dans cette partie**, on étudie le cas particulier où  $n = 3$ .

La matrice  $S$  est alors la suivante :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $S^2$ . En déduire les valeurs propres de  $S$ .
2. Déterminer une base de  $F$  et de  $G$ .  
Vérifier que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces propres de  $S$ .
3. En déduire que :  $F \oplus G = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

## Partie B

On revient dans la suite dans le cas général où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.

4.(a) Expliciter  $S$  et justifier que  $S$  est diagonalisable.

(b) Calculer  $SX$  lorsque  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

(c) Pour  $i$  et  $j$  deux entiers de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , expliciter le coefficient en ligne  $i$  et colonne  $j$  de  $S^2$  en fonction des coefficients  $s_{k,\ell}$  de  $S$ .

En déduire que  $S^2$  est la matrice identité d'ordre  $n$ .

5.(a) Soit  $X$  un vecteur de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Montrer qu'il existe un unique couple  $(Y, Z)$  de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que :

$$Y \in F, \quad Z \in G \quad \text{et} \quad X = Y + Z.$$

(b) Montrer que  $F$  et  $G$  sont les sous-espaces propres de  $S$ . Préciser les valeurs propres associées.

6. Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{i, n+1-j} = a_{n+1-i, j}.$$

On considère  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur propre associé.

(a) Vérifier que  $AS = SA$ .

(b) Montrer que  $SX$  est un vecteur propre de  $A$ .

(c) On pose  $Y = X + SX$ . Exprimer  $AY$  en fonction de  $Y$  et  $\lambda$ .

(d) En déduire que le sous-espace propre  $E_\lambda(A)$  associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $A$  contient nécessairement un vecteur symétrique non nul ou un vecteur antisymétrique non nul.

## PROBLEME

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $X_k$  le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le  $(k + 1)$ -ième tirage. En particulier, on a  $X_0 = 1$ . On admet que pour tout entier  $k$ ,  $X_k$  est une variable aléatoire de  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ .

### Partie A

- Déterminer la loi de  $X_1$ . Donner son espérance et sa variance.
- Justifier soigneusement que la loi de  $X_2$  est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}.$$

- Préciser l'ensemble  $X_k(\Omega)$  des valeurs que peut prendre  $X_k$ .
- Soient  $i \in \mathbb{N}^*$  et  $j \in X_k(\Omega)$ . Déterminer  $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i])$ .  
(On distinguera différents cas selon les valeurs relatives de  $i$  et  $j$ ).
- Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i-1]). \quad (*)$$

- À l'aide de la formule (\*), déterminer la loi de  $X_3$ .

- (a) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :  $\mathbb{P}([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}$ .

- (b) Déterminer pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la valeur de  $\mathbb{P}([X_k = k+1])$ .

- (c) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose :  $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}([X_k = 2])$ .

Exprimer  $a_{k+1}$  en fonction de  $a_k$  et de  $k$ .

Montrer que la suite  $(b_k)_{k \geq 0}$  définie par :  $\forall k \in \mathbb{N}, b_k = a_k + k + 2$  est géométrique.

En déduire alors que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_k = 2]) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

## Partie B

8. Que renvoie la fonction Scilab suivante pour un entier  $k$  non nul ?  
Détaillez le fonctionnement de la ligne 5.

```

1  function x = mystere( k )
2      n = 1 ;
3      b = 1 ;
4      for i = 1 : k
5          r = floor(rand()*(n+b)+1)
6          if r > n then
7              n = n + 1
8          else
9              b = b + 1
10         end
11     end
12     x = b
13 endfunction

```

9. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function LE = loi-exp(k,N)` qui prend en entrée un entier strictement positif  $k$  et un entier  $N$ , qui effectue  $N$  simulations de  $k$  tirages successifs dans l'urne et qui retourne un vecteur `LE` qui contient une estimation de la loi de  $X_k$  (c'est-à-dire que pour chaque  $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$ , `LE(i)` contient la fréquence d'apparition de l'événement  $[X_k = i]$  au cours des  $N$  simulations).  
On pourra utiliser la fonction `mystere`.
10. Recopier et compléter la fonction `loi-theo` suivante, qui prend en entrée un entier strictement positif  $n$ , afin qu'elle retourne un vecteur `LT` qui contient la loi théorique de  $X_n$ .

```

1  function LT = loi-theo(n)
2      M = zeros(n , n + 1)
3      M(1,1) = 1 / 2
4      M(1,2) = 1 / 2
5      for k = 1 : n - 1
6          M(k+1,1) = .....
7          for i = 2 : k + 1
8              M(k+1, i) = .....
9          end
10         M(k+1,k+2) = .....
11     end
12     LT = .....
13 endfunction

```

11. Un étudiant nous propose comme loi de  $X_5$  le résultat suivant :

$k$	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}([X_5 = k])$	0.001368	0.079365	0.419434	0.418999	0.079454	0.00138

A-t-il utilisé `loi-exp` ou bien `loi-theo` ?

**Partie C**

12.(a) À l'aide de la formule (\*), montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} E(X_k) + 1.$$

(b) Dédurre de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, E(X_k) = \frac{k+2}{2}.$$

(c) Soit  $Y_k$  la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne après  $k$  tirages.

Justifier que  $X_k$  et  $Y_k$  ont même espérance, puis retrouver le résultat de la question précédente.

On admettra pour la suite que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, V(X_k) = \frac{k+2}{12}.$$

13.(a) Soit  $\alpha > 0$ . Montrer que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2} \right| < \alpha \right) = 1.$$

(b) Interpréter ce résultat et le justifier intuitivement.

**Partie D**

14. Pour tout couple d'entiers  $(i, j)$  tels que  $1 \leq j < i$ , on définit l'application  $\varphi_{i,j}$  par :

$$\varphi_{i,j} : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto jP(X+1) - iP(X) \end{array} .$$

(a) Montrer que  $\varphi_{i,j}$  est linéaire.

(b) Pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ , montrer que  $\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$ .

(c) En déduire que  $\varphi_{i,j}$  est injective.

(d) Montrer que pour tout polynôme  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , il existe un polynôme  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $\varphi_{i,j}(Q) = P$ .

(Pour  $P$  non nul, on pourra s'intéresser à la restriction de  $\varphi_{i,j}$  à  $\mathbb{R}_n[X]$  où  $n$  est le degré de  $P$ ).

Ce qui précède montrant que  $\varphi_{i,j}$  est un automorphisme, on définit le polynôme  $P_{i,j}$  pour tout couple d'entiers  $(i, j)$  tels que  $1 \leq j \leq i$ , en posant :

$$P_{1,1}(X) = 1, \quad \text{et pour } 1 \leq j < i, \quad P_{i,j}(X) = \varphi_{i,j}^{-1}((3+X-i)P_{i-1,j}(X)),$$

et enfin pour tout entier  $i > 1$ ,

$$P_{i,i}(X) = - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0).$$

15.(a) Vérifier que :  $P_{2,1}(X) = -X - 2$ , puis calculer  $P_{2,2}(X)$ .

(b) Vérifier que :  $P_{3,2}(X) = -2X - 4$ .

On admettra dans la suite que :  $P_{3,1}(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1$  et  $P_{3,3}(X) = 3$ .

16. On considère, pour tout entier  $i$  de  $\mathbb{N}^*$ , la propriété suivante :

$$\mathcal{H}_i : \ll \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_k = i]) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k) j^k \gg.$$

On souhaite montrer par récurrence que, pour tout  $i$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{H}_i$  est vraie.

(a) Montrer que  $\mathcal{H}_1$  est vraie.

(b) Soit  $i > 1$ . On suppose que  $\mathcal{H}_{i-1}$  est vraie et on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \alpha_k = (k+1)! \mathbb{P}([X_k = i]) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k.$$

En utilisant la formule (\*) et la relation  $(3+X-i)P_{i-1,j}(X) = \varphi_{i,j}(P_{i,j}(X))$ , montrer que la suite  $(\alpha_k)_{k \geq 0}$  est géométrique.

Déterminer  $\alpha_0$  et en déduire que  $\mathcal{H}_i$  est vraie.

(c) Conclure.

17.(a) En utilisant le résultat de la question 15(a), retrouver le résultat de la question 7(c).

(b) Déterminer  $\mathbb{P}([X_k = 3])$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .





2019

**CORRIGÉ**

Mathématiques

CONCOURS  
ECRICOME  
**PREPA**

VOIE ECONOMIQUE ET  
COMMERCIALE

VOIE SCIENTIFIQUE

## ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

### ■ SUJET

- Deux exercices d'application des connaissances de base
- Un problème faisant largement appel aux probabilités.

### ■ ÉVALUATION

- Les deux exercices sont de valeur sensiblement égale dans le barème.
- 12 à 14 points sont destinés au problème.

### ■ ÉPREUVE

*Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.*

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

# CORRIGÉ

## EXERCICE 1

1.  $\diamond$  Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

La fonction  $t \mapsto (\cos t)^n$  est continue sur le segment  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , donc  $I_n$  est bien défini.

$$\diamond \text{ Et } I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = \left[ \sin t \right]_0^{\pi/2} = 1 \text{ et } I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Pour tout entier  $n$ ,  $I_n$  est bien défini et  $I_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $I_1 = 1$  et  $I_2 = \frac{\pi}{4}$ .

2. (a)  $\diamond$  Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos t \leq 1. \text{ Donc } \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t.$$

Par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens):

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

$\diamond$  Donc la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  est décroissante.

Et la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  est minorée par 0.

Donc la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  converge.

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On pose  $u$  et  $v$  les fonctions définies sur  $[0, \pi/2]$  par  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $u(t) = \cos^{n+1} t$  et  $v(t) = \sin t$ . Alors

$u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{et } \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], v'(t) = \cos t \text{ et } u'(t) = -(n+1) \sin t \cos^n t.$$

$$\text{Par intégration par parties : } I_{n+2} = \left[ \cos^{n+1} t \sin t \right]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^n t dt.$$

$$\text{Or } \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin^2(t) = 1 - \cos^2(t).$$

$$\text{Donc } I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^n t dt$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}).$$

(c) D'après la question précédente :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ .

Procédons par récurrence sur  $n$ .

$$\diamond I_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{1.0!} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ et } I_1 = 1 = \frac{1.0!}{1!}.$$

$$\diamond \text{ Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ Supposons que } I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Alors :

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+2)} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

et

$$I_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n+1} = \frac{(2n+2)(2n+2)}{(2n+3)(2n+2)} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}$$

Par récurrence, pour tout entier  $n$ ,  $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$  et  $I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ .

(d)

```
function y = I(n)
    u = zeros(1, 2n+2)
    u(1) = %pi/2
    u(2) = 1
    for k = 1 : n
        u(2*k+1) = (2*k) / (2*k+1) * u(2*k-1)
        u(2*k+2) = (2*k+1) / (2*k+2) * u(2*k)
    end
    y = u
endfunction
```

Remarque : l'énoncé du sujet comportait ici une erreur dans sa formulation, la notation  $u(0)$  n'étant pas valable avec toutes les versions du logiciel Scilab. Les candidats n'ont pas été pénalisés s'ils n'en tenaient pas compte et utilisaient la notation  $u(0)$ .

3. (a)  $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$  et  $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ .

(b) Pour tout entier  $n$  non nul:  $n \ln(\cos(n^{-1/4})) = n \ln\left(1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) - 1\right)\right)$ .

Comme  $\frac{1}{n^{1/4}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors  $\cos\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,

d'où :

$$n \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \left(\cos\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) - 1\right)$$

Et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1/4}} = 0$ ,

$$n \left(\cos\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) - 1\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \left(\frac{-1}{2n^{1/2}}\right)$$

Donc  $n \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\sqrt{n}}{2}$ .

Alors  $n \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ .

Or  $(\cos(n^{-1/4}))^n = \exp(n \ln(\cos(n^{-1/4})))$ .

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n^{-1/4}) = 0$ .

(c) De même  $\left(\cos\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) - 1 \rightarrow 0 \text{ et } \frac{1}{n^{2/3}} \rightarrow 0\right)$

$$n \ln\left(\cos(n^{-2/3})\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \left(\cos\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) - 1\right)$$

Et

$$\cos\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{4/3}}$$

Donc  $n \ln\left(\cos(n^{-2/3})\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{1/3}}$  et en particulier  $n \ln\left(\cos(n^{-2/3})\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos(n^{-2/3})\right)^n = 1.$$

4. (a) Soit  $n \geq 1$ .

Puisque  $\forall t \in [0, n^{-1/4}]$ ,  $\cos(t) \leq 1$ , alors par positivité de l'intégrale (bornes bon sens)

$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt \leq \int_0^{n^{-1/4}} 1 dt$$

$$\text{Donc } \int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt \leq n^{-1/4}.$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La fonction  $\cos$  est décroissante sur  $\left[n^{-1/4}, \frac{\pi}{2}\right]$ , donc :

$$\int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \leq \int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(n^{-1/4}))^n dt$$

Or  $\int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(n^{-1/4}))^n dt = \left(\frac{\pi}{2} - n^{-1/4}\right) \cos^n(n^{-1/4})$  et  $\left(\frac{\pi}{2} - n^{-1/4}\right) \cos^n(n^{-1/4}) \leq \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n$ .

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \leq \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n.$$

(c)  $\diamond$  Soit  $n \geq 1$ .

Par la relation de Chasles,  $I_n = \int_0^{n^{-1/4}} \cos^n t dt + \int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} \cos^n t dt$

Or d'après les questions précédentes,  $\int_0^{n^{-1/4}} \cos^n t dt + \int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} \cos^n t dt \leq \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n$ .

Et d'après la question 2a,  $0 \leq I_n$ .

$$\text{Donc } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{\pi}{2} (\cos(n^{-1/4}))^n.$$

$\diamond$  Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1/4}} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-1/4}))^n$  (question 3b).

Ainsi,  $(I_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0 par encadrement.

5. (a)  $\diamond$  Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Par la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale,  $I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt$ .

Par décroissance de  $\cos$  sur  $[0, n^{-2/3}]$ ,  $\forall t \in [0, n^{-2/3}]$ ,  $\cos(t) \geq \cos(n^{-2/3})$ .

Donc par croissance de l'intégrale  $\int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos(n^{-2/3}))^n dt$ .

Or  $\int_0^{n^{-2/3}} (\cos(n^{-2/3}))^n dt = n^{-2/3} \left( \cos(n^{-2/3}) \right)^n$ .

Donc  $I_n \geq n^{-2/3} \left( \cos(n^{-2/3}) \right)^n$ .

$\diamond$  D'après 3(c),  $n^{-2/3} \left( \cos(n^{-2/3}) \right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2/3}}$ .

Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2/3}}$  est une série de Riemann divergente.

Et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{n^{2/3}} \geq 0$ .

Donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général  $n^{-2/3} \left( \cos(n^{-2/3}) \right)^n$  est divergente également.

Or  $I_n \geq n^{-2/3} \left( \cos(n^{-2/3}) \right)^n \geq 0$ .

Donc par critère de majoration,  $\sum_{n \geq 0} I_n$  diverge.

(b)

```
function y=somme(n)
    y=sum(I(n)(1:n+1))
endfunction
```

6. (a) Soit  $t \in ]-\pi, \pi[$ ,

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} &= \frac{2 \cos^2(t/2)}{\cos^2(t/2) + \sin^2(t/2)} \\ &= 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= 1 + \cos(t) \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente,  $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2} dt$ .

À l'aide du changement de variable  $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ , (la fonction  $t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , bijectif, strictement croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  vers  $[0, 1]$ )

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2} dt = \int_0^1 du = 1$$

$$\text{Ainsi } \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t} = 1.$$

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Par linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \left( \sum_{k=0}^n (-\cos t)^k \right) dt$$

Or  $\forall t \in [0, \pi/2]$ ,  $\cos(t) \neq -1$ . Donc  $\forall t \in [0, \pi/2]$ ,  $\sum_{k=0}^n (-\cos t)^k = \frac{1 - (-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t}$ .

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} dt.$$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt.$$

(d) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Par inégalité triangulaire et comme  $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\cos(t) \geq 0$ ,

$$0 \leq \left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt$$

Or  $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\cos(t) + 1 \geq 1$ . Donc  $\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t dt$ .

$$\text{Ainsi } \left| \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}.$$

(e) D'après la question 4c,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0$ , Donc par encadrement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1 + \cos t} dt = 0$ .

Donc

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)}$$

$$\text{Ainsi, la série de terme général } (-1)^k I_k \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 1.$$

## EXERCICE 2

### Partie A

1.  $\diamond$  On obtient  $S^2 = I_3$ .

Ainsi,  $X^2 - 1$  est un polynôme annulateur de  $S$ , de racines 1 et  $-1$ . Ainsi,  $Sp(S) \subset \{1, -1\}$ .

- $\diamond$  De plus,  $S - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  non inversible (une colonne nulle), donc  $1 \in Sp(S)$ .

De même,  $S + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  non inversible ( $C_1 = C_3$ ), donc  $-1 \in Sp(S)$ .

$$Sp(S) = \{1, -1\}$$

2.  $\diamond F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \text{ tel que } x_1 = x_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

Ainsi  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $F$ .

- $\diamond G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \text{ tel que } \begin{matrix} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Ainsi  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $G$ .

- $\diamond$  Or  $S - I_3$  est une matrice de rang 1. Donc d'après le théorème du rang  $\dim \text{Ker}(S - I_3) = 2$ .

Or  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  forment une famille libre d'éléments de  $\text{Ker}(S - I_3)$ .

Donc  $F = \text{Ker}(S - I_3)$ , c'est-à-dire  $F$  est le sous-espace propre de  $S$  associé à 1.

- $\diamond$  Et le rang de  $S + I_3$  est égal à 2. Donc  $\dim \text{Ker}(S + I_3) = 1$ . Or  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(S + I_3)$ .

Donc  $G = \text{Ker}(S + I_3) = E_S(-1)$ .

3.  $S$  est diagonalisable puisque symétrique réelle, donc  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(S - I_3) \oplus \text{Ker}(S + I_3)$ .

Ainsi  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = F \oplus G$ .



Partie B

4. (a)  $S = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ . La matrice  $S$  est symétrie réelle donc  $S$  est diagonalisable.

(b)  $SX = S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$ .

(c) En notant  $[S^2]_{i,j}$  le coefficient en position  $(i,j)$  de  $S^2$ ,

$$[S^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^n s_{i,k} s_{k,j} = s_{i,n+1-i} s_{n+1-i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc  $S^2 = I_n$ .

5. (a) Procédons par analyse et synthèse.

◇ Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Supposons qu'il existe  $Y$  un vecteur de  $F$  et  $Z$  un vecteur de  $G$  tels que  $X = Y + Z$ .

Alors il existe  $n$ -uplets de réels  $(y_1, \dots, y_n)$  et de  $(z_1, \dots, z_n)$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = y_i + z_i$ .

Comme  $Y \in F$  et  $Z \in G, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{n+1-i} = y_i - z_i$ .

Donc  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i + x_{n+1-i} = 2y_i$  et  $x_i - x_{n+1-i} = 2z_i$ .

Donc  $Y$  et  $Z$  s'ils existent sont définis de manière unique.

◇ Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Posons  $Y = \left( \frac{x_i + x_{n+1-i}}{2} \right)_{1 \leq i \leq n}$  et  $Z = \left( \frac{x_i - x_{n+1-i}}{2} \right)_{1 \leq i \leq n}$ .

Alors  $Y + Z = X$  et  $Y \in F$  et  $Z \in G$ .

En conclusion, il existe un unique couple  $(Y, Z)$  de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que :  $Y \in F, Z \in G$  et  $X = Y + Z$ .

(b)  $\diamond$  D'après la question 5(a),  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F \oplus G$ .  
 Or  $F \subset \text{Ker}(S - I_n)$  et  $G \subset \text{Ker}(S + I_n)$ .

$\diamond$  Comme  $S$  est symétrique donc diagonalisable, avec 1 et  $-1$  seules valeurs propres possibles puisque  $S^2 = I_n$ , donc

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(S - I_n) \oplus \text{Ker}(S + I_n)$$

$\diamond$   $F = \text{Ker}(S - I_n)$  et  $G = \text{Ker}(S + I_n)$ .

Ainsi  $F$  est le sous-espace propre de  $S$  associé à la valeur propre 1 et  $G$  celui associé à  $-1$ .

6. (a) Pour tous entiers  $i$  et  $j$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\begin{aligned} [AS]_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} s_{k,j} \\ &= a_{i,n+1-j} s_{n+1-j,j} \\ &= a_{i,n+1-j} \\ [SA]_{i,j} &= \sum_{k=1}^n s_{i,k} a_{k,j} \\ &= a_{n+1-i,j} \end{aligned}$$

Or  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,n+1-j} = a_{n+1-i,j}$ . Ainsi,  $AS = SA$ .

(b)  $X$  est non nul. Il existe donc un entier  $i_0$  tel que  $x_{i_0} \neq 0$ . Or  $SX = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ . Donc  $SX \neq 0$ .

De plus,  $A(SX) = SAX \stackrel{\text{car } AX=\lambda X}{=} S(\lambda X) = \lambda(SX)$ .

Ainsi,  $SX$  est bien vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$ .

(c)  $AY = AX + ASX = \lambda X + \lambda SX = \lambda(X + SX) = \lambda Y$ .

Donc  $AY = \lambda Y$ .

(d)  $E_\lambda(A)$  est non réduit à  $\{0\}$ . Il contient donc un vecteur propre  $X$  non nul.

Si  $X$  est antisymétrique, alors  $E_\lambda(A)$  contient un vecteur antisymétrique.

Si  $X$  n'est pas antisymétrique, alors  $Y = X + SX$  est encore non nul (car  $SX \neq -X$ ). Et  $SY = Y$ , donc  $Y$  est un vecteur symétrique. Si  $AY = \lambda Y$ , alors  $Y$  est un élément de  $E_\lambda(A)$ .

Ainsi,  $E_\lambda(A)$  contient nécessairement au moins un vecteur propre non nul qui soit symétrique ou antisymétrique.

## PROBLEME

### Partie A

1.  $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$ .

En notant  $B_k$  : « le  $k$ -ième tirage donne une boule blanche » et  $N_k$  : « le  $k$ -ième tirage donne une boule noire », on a :

$$\mathbb{P}([X_1 = 1]) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_1 = 2]) = \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2}$$

$X_1$  suit donc une loi uniforme sur  $\{1, 2\}$ , d'espérance  $E(X_1) = \frac{3}{2}$  et de variance  $V(X_1) = \frac{1}{4}$ .

2.  $[X_2 = 1] = B_1 \cap B_2$ , donc :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Car quand une boule blanche est tirée au premier tirage, pour le second tirage, l'urne est composée d'une boule blanche et de deux boules noires. Donc  $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3}$ .

De même,  $[X_2 = 3] = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ , donc :

$$\mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Comme  $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ , on en déduit que :  $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ .

Ainsi  $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$  et

$$\begin{cases} \mathbb{P}([X_2 = 1]) &= \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}([X_2 = 2]) &= \frac{2}{3} \\ \mathbb{P}([X_2 = 3]) &= \frac{1}{6} \end{cases}$$

3. Pour  $k \geq 1$ . Pour chacun des  $k$  premiers tirages, une boule blanche a pu être ajoutée ou non dans l'urne.

Donc  $X_k(\Omega) = \llbracket 1, k+1 \rrbracket$ .

4. Soit  $i \geq 1$  et  $j \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$ .

Si  $[X_k = j]$  est réalisé, alors seuls  $[X_{k+1} = j]$  et  $[X_{k+1} = j+1]$  peuvent se réaliser, respectivement si on obtient au  $(k+1)$ -ième tirage une boule blanche (resp. noire). De plus sachant  $[X_k = j]$ , on a exactement  $j$  boules blanches et  $k+2$  boules en tout dans l'urne,

Donc  $\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) = \begin{cases} \frac{j}{k+2} & \text{si } i = j \\ 1 - \frac{j}{k+2} & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5. La famille  $([X_k = j])_{1 \leq j \leq k+1}$  formant un système complet d'événements, on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) &= \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]) \mathbb{P}([X_k = j]) \\ &= \mathbb{P}_{[X_k=i-1]}([X_{k+1} = i]) \mathbb{P}([X_k = i-1]) + \mathbb{P}_{[X_k=i]}([X_{k+1} = i]) \mathbb{P}([X_k = i]) \\ &= \left(1 - \frac{i-1}{k+2}\right) \mathbb{P}([X_k = i-1]) + \frac{i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i]) \\ &= \frac{i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i-1]) \end{aligned}$$

Ainsi  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i-1]).$

6.  $X_3(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ .

- $\mathbb{P}([X_3 = 1]) = \frac{1}{4} \mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{24}$
- $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = 2]) + \frac{3}{4} \mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{11}{24}$
- $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = \frac{3}{4} \mathbb{P}([X_2 = 4]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{11}{24}$
- $\mathbb{P}([X_3 = 4]) = \frac{1}{4} \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{24}$

7. (a) Procédons par récurrence sur  $k$ .

◇  $\mathbb{P}([X_0 = 1]) = 1 = \frac{1}{(1+0)!}$ .

◇ Soit  $k$  un entier naturel. Supposons que  $\mathbb{P}([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}$ .

Or d'après la question 5, on a :

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = 1]) = \frac{1}{k+2} \mathbb{P}([X_k = 1])$$

Donc par hypothèse de récurrence,  $\mathbb{P}([X_{k+1} = 1]) = \frac{1}{(k+2)} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+2)!}$ .

Ainsi par le principe de récurrence,  $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}$ .

- (b) Soit  $k$  un entier.

$$[X_k = k+1] = \bigcap_{i=1}^k \overline{B}_i.$$

D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}([X_k = k+1]) = \mathbb{P}(\overline{B}_1) \mathbb{P}_{\overline{B}_1}(\overline{B}_2) \cdots \mathbb{P}_{\overline{B}_1 \cap \cdots \cap \overline{B}_{k-1}}(\overline{B}_k)$$

Donc  $\mathbb{P}([X_k = k+1]) = \frac{1}{(k+1)!}$ .

- (c)  $\diamond$  Soit  $k$  un entier naturel.

D'après la question 5,

$$a_{k+1} = (k+2)! \mathbb{P}([X_{k+1} = 2]) = (k+2)! \left( \frac{2}{k+2} \mathbb{P}([X_k = 2]) + \frac{k+1}{k+2} \mathbb{P}([X_k = 1]) \right).$$

Donc  $a_{k+1} = 2a_k + k + 1$ .

- $\diamond$  Soit  $k$  un entier naturel.

Par définition,  $b_{k+1} = a_{k+1} + k + 3 = 2a_k + 2k + 4 = 2b_k$ .

La suite  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est donc géométrique, de raison 2.

Alors :  $\forall k \in \mathbb{N}, b_k = 2^k b_0 = 2^{k+1}$ .

- $\diamond$  Donc :  $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_k = 2]) = \frac{a_k}{(k+1)!} = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$ .

## Partie B

8. La fonction permet de simuler une réalisation de  $X_k$ .

La ligne 5 permet de choisir un entier uniformément entre 1 et  $n + b$ , ce qui permet de simuler un tirage dans l'urne, les variables  $n$  et  $b$  évoluant au cours de l'expérience. En effet, `rand()` simule une loi uniforme sur  $[0, 1]$ , donc `(n+b)*rand()+1` simule la loi  $\mathcal{U}([1, n + b + 1])$ . Ainsi `floor((n+b)*rand()+1)` simule la loi  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n + b \rrbracket)$

9.

```
function LE = loi_exp(k,N)
    LE = zeros(1,k+1)
    for i=1:N
        m=mystere(k)
        LE(m)=LE(m)+1
    end
    LE = LE/N
endfunction
```

10.

```
function LT = loi_theo(n)
    M = zeros(n , n + 1)
    M(1,1) = 1 / 2
    M(1,2) = 1 / 2
    for k = 1 : n - 1
        M(k+1,1) = 1/(k+2)*M(k,1)
        for i = 2 : k + 1
            M(k+1, i) = i/(k+2)*M(k,i)+(3+k-i)/(k+2)*M(k,i-1)
        end
        M(k+1,k+2) = 1/(k+2)*M(k,k+1)
    end
    LT = M(n,:)
endfunction
```

11. Les résultats ne sont pas symétriques (on n'a pas  $\mathbb{P}([X_5 = 1]) = \mathbb{P}([X_5 = 6])$ ), donc c'est sans doute plutôt une estimation et non le calcul théorique : l'étudiant a utilisé `loi_exp`.

## Partie C

12. (a) Pour tout  $k$ ,  $X_k$  admet bien une espérance puisque  $X_k$  bornée.

De plus,

$$\begin{aligned}
 E(X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+2} i \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^{k+2} i \left( \frac{i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i-1]) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{k+2} \frac{i^2}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i]) + \sum_{j=0}^{k+1} \frac{j+1}{k+2} (k+2-j) \mathbb{P}([X_k = j]) \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} \left( \frac{i^2}{k+2} + \frac{i+1}{k+2} (k+2-i) \right) \mathbb{P}([X_k = i]) + (k+2) \mathbb{P}([X_k = k+2]) + \mathbb{P}([X_k = 0]) \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} \left( \frac{k+1}{k+2} i + 1 \right) \mathbb{P}([X_k = i]) \\
 &= E \left( \frac{k+1}{k+2} X_k + 1 \right) \\
 &= \frac{k+1}{k+2} E(X_k) + 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \forall k \in \mathbb{N}, E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} E(X_k) + 1.$$

(b)  $\diamond E(X_0) = 1 = \frac{0+2}{2}$  et  $E(X_1) = \frac{3}{2} = \frac{1+2}{2}$ .

$\diamond$  Soit  $k \geq 0$ . Supposons  $E(X_k) = \frac{k+2}{2}$ .

$$\text{Alors : } E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{k+2}{2} + 1 = \frac{k+1}{2} + 1 = \frac{k+3}{2}$$

$$\text{Donc } \forall k \in \mathbb{N}, E(X_k) = \frac{k+2}{2}.$$

(c) Par symétrie entre boules blanches et noires dans l'urne,  $X_k$  et  $Y_k$  suivent la même loi, donc ont la même espérance.

Or  $X_k + Y_k = k + 2$ , donc  $E(Y_k) = E(X_k) = \frac{1}{2} E(X_k + Y_k) = \frac{k+2}{2}$ .

13. (a) La variable  $X_k$  admettant espérance et variance, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P} (|X_k - E(X_k)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_k)}{\varepsilon^2}$$

Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P} \left( \left| X_k - \frac{k+2}{2} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{k+2}{12\varepsilon^2}$$

En prenant  $\varepsilon = \alpha(k+2)$ ,  $\mathbf{P} \left( \left| X_k - \frac{k+2}{2} \right| \geq \alpha(k+2) \right) \leq \frac{1}{12(k+2)\alpha^2}$ .

Donc par encadrement  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left( \left| X_k - \frac{k+2}{2} \right| \geq \alpha(k+2) \right) = 0$ .

Or  $\left( \left| \frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2} \right| < \alpha \right) = \left( \left| X_k - \frac{k+2}{2} \right| < \alpha(k+2) \right) = \overline{\left( \left| X_k - \frac{k+2}{2} \right| \geq \alpha(k+2) \right)}$ .

Donc  $\mathbf{P} \left( \left| \frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2} \right| < \alpha \right) = 1 - \mathbf{P} \left( \left| X_k - \frac{k+2}{2} \right| \geq \alpha(k+2) \right)$ .

Donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left( \left| \frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2} \right| < \alpha \right) = 1$ .

(b) Ainsi  $\left( \frac{X_k}{k+2} \right)_{k \geq 0}$  converge en probabilité vers  $1/2$ , autrement dit, la proportion de boules blanches/noires dans l'urne va avoir tendance à s'équilibrer avec un grand nombre de tirages. En effet dès qu'un déséquilibre se crée dans l'urne, les boules majoritaires ont plus de chance d'être tirées et donc de rajouter des boules de l'autre couleur.

## Partie D

14. (a) Pour  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}(\lambda P + Q) &= j(\lambda P(X+1) + Q(X+1)) - i(\lambda P(X) + Q(X)) \\ &= \lambda(jP(X+1) - iP(X)) + jQ(X+1) - iQ(X) \\ &= \lambda\varphi_{i,j}(P) + \varphi_{i,j}(Q) \end{aligned}$$

Donc  $\varphi_{i,j}$  est une application linéaire.

(b)  $\varphi_{i,j}(0) = 0$ . Donc le degré de  $\varphi_{i,j}(0)$  est égal au degré de 0.  
 Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\varphi_{i,j}(X^k) = j(X+1)^k - iX^k = j \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} X^\ell - iX^k = (j-i)X^k + \sum_{\ell=0}^{k-1} j \binom{k}{\ell} X^\ell$$

Comme  $i \neq j$ ,  $\varphi_{i,j}(X^k)$  est bien un polynôme de degré  $k$ .

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ . Il existe un  $d+1$ -uplets de réels  $(a_0, \dots, a_d)$  tel que  $a_d \neq 0$  et

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k.$$

Alors par linéarité de  $\varphi_{i,j}$ ,  $\varphi_{i,j}(P) = \sum_{k=0}^d a_k \varphi_{i,j}(X^k)$ .

Or le degré de  $\varphi_{i,j}(X^k)$  est égal à  $k$  donc le degré de  $\varphi_{i,j}(P)$  est égal à  $d$  le degré de  $P$ .

Donc pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$ .

(c) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P \in \text{Ker}(\varphi_{i,j})$ .

Alors  $\varphi_{i,j}(P) = 0$ , donc  $P$  doit avoir le même degré que le polynôme nul, donc  $P$  est nul.

Ainsi,  $\text{Ker}(\varphi_{i,j}) = \{0\}$  et  $\varphi_{i,j}$  est injective.

(d) Supposons  $P \neq 0$  (sinon le polynôme  $Q$  nul convient) et notons  $n = \deg(P)$ .

La restriction de  $\varphi_{i,j}$  à  $\mathbb{R}_n[X]$  fournit un endomorphisme en dimension finie d'après 14(a) et 14(b), qui est injectif d'après 14(c), donc bijectif. Donc il existe  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\varphi_{i,j}(Q) = P$ .

15. (a)  $\varphi_{2,1}(-X - 2) = 1(-X + 1) - 2(-X - 2) = (-X - 3) + 2X + 4 = X + 1 = (1 + X)P_{1,1}(X)$   
Donc  $\varphi_{2,1}^{-1}((3 + X - 2)P_{1,1}(X)) = -X - 2$ .

Ainsi  $P_{2,1} = -X - 2$ .

Par ailleurs,  $P_{2,2}(X) = -\sum_{j=1}^1 P_{2,j}(0) = -P_{2,1}(0) = -(-2) = 2$ .

Ainsi  $P_{2,2}(X) = 2$ .

(b)  $\varphi_{3,2}(-2X - 4) = 2(-2(X + 1) - 4) - 3(-2X - 4) = 2(-2X - 6) + 6X + 12 = 2X = XP_{2,2}(X)$   
Donc  $\varphi_{3,2}^{-1}((3 + X - 3)P_{2,2}(X)) = -2X - 4$ .

Ainsi  $P_{3,2} = -2X - 4$ .

16. (a) Pour  $i = 1$ , on a retrouvé que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!} P_{1,1}(k) = \frac{1}{(k+1)!}$ , ce qui est bien vrai d'après 7(a).

(b) Soit  $i > 1$ . On suppose que  $\mathcal{H}_{i-1}$  est vraie

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= (k+2)! \mathcal{P}([X_{k+1} = i]) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1) j^{k+1} \\ &= (k+1)! \left( i \mathcal{P}([X_k = i]) + (3+k-i) \mathcal{P}([X_k = i-1]) \right) - \sum_{k=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1) j^{k+1} \\ &= i(k+1)! \mathcal{P}([X_k = i]) + (3+k-i) \sum_{j=1}^{i-1} P_{i-1,j}(k) j^k - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1) j^{k+1} \\ &= i\alpha_k + \sum_{j=1}^{i-1} ((3+k-i)P_{i-1,j}(k) - jP_{i,j}(k+1) + iP_{i,j}(k)) j^k \\ &= i\alpha_k \end{aligned}$$

La suite  $(\alpha_k)$  est donc géométrique de raison  $i$ , et de premier terme  $\alpha_0 = -\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0) = P_{i,i}(k)$ .



$$\text{Donc } \forall k \in \mathbb{N}, (k+1)! \mathbb{P}([X_k = i]) = i^k \alpha_0 + \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k = \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k) j^k.$$

(c) D'après (a) et (b), par récurrence on en déduit que  $\forall i \geq 1, \mathcal{H}_i$  est vraie.

17. (a) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}([X_k = 2]) = \frac{1}{(k+1)!} (P_{2,2}(k)2^k + P_{2,1}(k))$ . Donc  $\mathbb{P}([X_k = 2]) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$ .

(b) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}([X_k = 3]) = \frac{1}{(k+1)!} (P_{3,3}(k)3^k + P_{3,2}(k)2^k + P_{3,1}(k))$ .

$$\text{Donc } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_k = 3]) = \frac{3^{k+1} - (k+2)2^{k+1} + \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1}{(k+1)!}.$$

# RAPPORT D'ÉPREUVE

## Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée. En particulier un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entraîner très régulièrement à faire des calculs;

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 10,88 et un écart-type de 5,37, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

## Commentaires particuliers

### Exercice 1

Cet exercice d'analyse s'intéresse aux intégrales de Wallis, au comportement de la suite associée, de la série et de la série alternée associée. Les premières questions de cet exercice sont des questions très classiques sur la suite  $(I_n)$  des intégrales de Wallis. Les questions suivantes, un peu moins classiques, permettent de minorer  $I_n$  et de déterminer la nature de la série du minorant par la recherche un peu délicate d'un équivalent. La dernière partie de cet exercice a pour but de déterminer la nature et la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n I_n$  en utilisant les chapitres sur les intégrales.

1. C'est une question classique sur l'existence des intégrales de Wallis et le calcul de  $I_0$ ,  $I_1$  et  $I_2$ . Si l'existence de  $I_n$  est en général bien montrée, la continuité de la fonction à intégrer est souvent omise. Les calculs de  $I_0$  et de  $I_1$  sont en général corrects, Mais celui de  $I_2$  est rarement fait et en général faux, parfois tenté avec une intégration par parties ou encore pour certains par détermination d'une primitive de  $t \mapsto \cos^2(t)$  qui serait la fonction  $t \mapsto \frac{1}{3} \sin^3(t)$ .

2. (a) La croissance et la convergence de la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  font partie des thèmes très souvent abordés dans les sujets de concours. Cependant, les résolutions rencontrées ne laissent pas entrevoir une aisance sur ces questions. La positivité de  $I_n$ , nécessaire pour prouver la convergence de la suite  $(I_n)$ , est peu rappelée.
- (b) De même, la relation de récurrence attendue fait appel à une méthode par une intégration par partie très fréquente et normalement rencontrée à plusieurs reprises par les candidats lors de leur préparation. Cependant, la rigueur exigible dans l'utilisation du théorème et dans les calculs qui l'accompagnent a rarement été présente dans les copies. Ainsi, les hypothèses de ce théorème ne sont ni rappelées ni vérifiées : la classe  $C^1$  des fonctions considérées est peu étudiée.
- (c) Un raisonnement par récurrence détaillé est attendu ici. Il est décevant que si peu de candidats aient traité cette question.
- (d) Quand la question est abordée, elle est correctement traitée. Les étudiants incluent dans la boucle une fonction factorielle qui est déjà une boucle.
3. (a) Cette question est une simple question de cours. Si l'équivalent de  $\ln(1 + u)$  est relativement bien connu, celui de  $1 - \cos(x)$  l'est beaucoup moins.
- (b) La composition des équivalents n'est pas possible. L'utilisation propre des équivalents obtenus à la question précédente est attendue avec une justification correcte. Certains ont admis l'équivalent pour prouver la deuxième partie de la question. La rédaction de cette limite doit être à nouveau très soignée. Ainsi les écritures suivantes et fausses indiquent une incompréhension des notions abordées :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \cos\left(n^{-1/4}\right) \right)^n = e^{-1/2\sqrt{n}} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \cos\left(n^{-1/4}\right) \right)^n = e^{-\infty} = 0.$$

- (c) La démarche à suivre ici est la même que dans la question précédente, mais l'énoncé n'en donne aucun détail. Les candidats n'ont pas toujours su prendre assez de recul pour mener à bien ce raisonnement.
4. (a) Une justification propre de l'inégalité est attendue, à savoir la croissance de l'intégrale et la majoration de  $\cos(t)$  par 1 pour tout réel  $t$  de  $[0, n^{-1/4}]$ .
- (b) Cette question est peu abordée, elle demande à nouveau une justification soignée et précise, en particulier la décroissance de la fonction cosinus sur  $[0, \pi/2]$  est attendue.
- (c) Certains traitent cette question en admettant les deux premières. Cette démarche ne peut être que conseillée aux candidats peu à l'aise avec les inégalités. Cependant, trop n'utilisent que la question précédente et négligent le premier terme obtenu par la relation de Chasles. Pour conclure sur la limite de  $I_n$ , le théorème d'encadrement est indispensable ; il est alors important de donner un encadrement complet de  $I_n$  et pas seulement un majorant. On relève de nombreuses confusions entre le théorème d'encadrement et les critères de comparaison.
5. (a) La première partie de cette question est peu traitée, elle fait appel aux mêmes notions que la question 4(b). La deuxième partie de cette question fut peu traitée et en général bâclée, la divergence de la série de terme général  $n^{-2/3} (\cos(n^{-2/3}))^n$  est annoncée mais non prouvée. Les critères de comparaison utilisés ne sont pas clairement explicités, leurs hypothèses ne sont pas toujours vérifiées, en particulier la positivité est rarement donnée.
- (b) Cette question est peu traitée. La commande `sum` semble peu connue.

6. (a) Cette question de trigonométrie est peu traitée. Les formules de trigonométries doivent pouvoir être retrouvées rapidement.
- (b) Si le changement de variable est donné dans l'énoncé, le candidat doit en vérifier la validité en vérifiant clairement les hypothèses du théorème utilisé.
- (c) Cette question fut peu traitée. Seules les notions de somme géométrique et de linéarité de l'intégrale sont utiles ici.
- (d) Cette question fut peu traitée. La manipulation des inégalités et des valeurs absolues sont très maladroites. L'argument  $1 + \cos(x) > 1$  est en général absent.
- (e) Cette question de synthèse fut peu traitée. Il est dommage cependant de ne pas avoir admis les précédentes, c'était l'occasion ici de montrer une capacité à utiliser des résultats admis et à en faire la synthèse pour conclure au raisonnement détaillé de la question 6 dans son ensemble. Cependant, certains majorent la valeur absolue de la différence par la somme des valeurs absolues dont l'un des termes tend vers 0, mais ne perçoivent pas que le théorème d'encadrement ne peut pas s'appliquer ici car seule une majoration est donnée.

## Exercice 2

Cet exercice d'algèbre définit et étudie d'une part les vecteurs symétriques et antisymétriques, d'autre part la matrice symétrique n'ayant des 1 que sur l'anti-diagonale et des 0 ailleurs. La première partie se consacre au cas de la dimension 3. La deuxième partie traite le cas général en guidant le raisonnement étape par étape. Une mauvaise compréhension des définitions des ensembles  $F$  et  $G$  a pénalisé de nombreux candidats. Des lacunes importantes en algèbre linéaire apparaissent aussi à travers les résolutions proposées de cet exercice.

### Partie A

- Le calcul de  $S^2$  ne pose aucun problème. Les valeurs propres de  $S$  se déduisent de ce calcul par l'utilisation de la relation entre les valeurs propres d'une matrice et les racines d'un polynôme annulateur. La recherche des valeurs propres par la résolution d'un système n'était pas un attendu de cette question. Trop de candidats oublient de vérifier que 1 et  $-1$  sont bien des valeurs propres de  $S$  et non seulement les valeurs propres possibles en tant que racine du polynôme annulateur considéré ici.
- Globalement, cette question est plutôt bien traitée, mais de manière assez incomplète. En particulier, le caractère base de la famille considérée n'est pas toujours prouvé, les égalités entre  $F$ ,  $G$  et les sous-espaces propres sont affirmées et non justifiées.  
 Certains peinent à trouver une base de  $F$  ou de  $G$  à partir d'un système d'équations. En particulier, la notation  $\text{Vect}(x_1, 0, x_1)$  n'est pas correct si  $x_1$  n'est pas fixé; de même,  $\text{Vect}(1, 0, 1)$  est un ensemble (et même un espace vectoriel) et non une base de vecteurs.  
 La notation non standard  $SEP(S, -1)$  n'est pas proposée dans l'énoncé. Il serait souhaitable alors de définir une telle notation avant de l'utiliser.
- De nombreuses pistes sont possibles pour traiter cette question. Il serait alors bon de privilégier la plus rapide. Certains candidats ne remettent pas en question les résultats faux obtenus à la question précédente. Ainsi, certains trouvent un vecteur commun dans les bases de  $F$  et de  $G$ , et affirment que  $F$  et  $G$  sont en somme directe; d'autres obtiennent deux espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de dimension 2 supplémentaires dans un espace vectoriel de dimension 3. Un esprit critique est attendu de la part des candidats.

## Partie B

4. (a) Question bien traitée dans l'ensemble. Certains oublient de justifier proprement que  $S$  est diagonalisable. D'autres pensent que  $S$  est une matrice diagonale.
- (b) En général, cette question est bien résolue. Cependant, certains pensent que  $SX$  est encore une matrice carrée.
- (c) L'énoncé précise bien ici que la formule donnant l'expression du coefficient du produit de deux matrices en fonction des coefficients de ces matrices est attendue. Cette consigne est peu respectée. Les rares candidats ayant donné la formule demandée éprouvent des difficultés à l'appliquer et à gérer les indices de sommation. Trop de candidats se contentent de donner la matrice  $S^2$  (résultat donné dans l'énoncé).
5. (a) Très peu de candidats ont abordé cette question. De nombreuses résolutions étaient possibles et acceptées. Très peu reconnaissent ici qu'il est demandé de prouver que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Un raisonnement par analyse et synthèse était attendu et rarement rencontré. Certains tentent d'explicitier une base de  $F$  et une base de  $G$ , mais restent en général bien trop approximatifs, ne prenant pas en compte la parité de  $n$ .  
 Confondant plus ou moins matrice colonne et matrice carrée, certains considèrent que  $X$  symétrique est équivalent à  ${}^tX = X$
- (b) Peu de candidats abordent cette question. Le lien entre la définition des ensembles  $F$  et  $G$  et la question 4.(b) est rarement établi. Trop de candidats qui abordent cette question affirment mais ne démontrent rien. Prouver une seule inclusion ne suffit pas pour déduire l'égalité.
6. (a) Cette question est peu abordée. Quand elle est traitée, beaucoup trop se contentent d'explicitier les matrices et de donner le résultat sans s'appuyer à nouveau sur la formule donnant les coefficients du produit matriciel. Ici, une justification propre est attendue.
- (b) Peu de candidats abordent cette question pourtant classique. La vérification de  $SX$  non nul est rarement réalisée. Rappelons que si  $S$  est non nul et  $X$  est non nul, il reste possible que  $SX$  soit nul.
- (c) Peu de candidats abordent cette question. Mais ceux qui l'ont traitée l'ont fait correctement.
- (d) L'intitulé de la question assez original a rarement été compris par le nombre très faible de candidats l'abordant.

## Problème

Le problème proposé cette année étudiait les variables aléatoires discrètes égales au nombre de boules blanches dans une urne dont la composition varie au cours du temps. Une première partie permet d'établir une relation entre la loi de ces variables aléatoires et d'obtenir certains éléments de ces lois. La deuxième partie s'intéresse à des simulations informatiques de ces variables aléatoires. La troisième partie recherche l'espérance et la variance de ces variables aléatoires avant d'en regarder la convergence en probabilité. Enfin, la dernière partie, par une étude algébrique d'endomorphismes de polynômes, permet de déterminer la probabilité  $\mathcal{P}(X_k = 3)$ .

## Partie A

1. La loi de  $X_1$  est en général bien déterminée, même si peu parlent de la loi uniforme ; nombreux sont ceux qui pensent reconnaître en  $X_1$  une variable aléatoire de loi de Bernoulli. Trop de candidats s'engagent dans des calculs longs et maladroits pour déterminer l'espérance et la variance de  $X_1$ .

2. Les résultats étant donnés dans l'énoncé, une justification très claire et soignée était attendue. Un arbre semble peu propice, mais une étude explicite des événements pouvait permettre de répondre avec efficacité à cette question. Trop de candidats justifient ces résultats par des discours très confus et amenant trop souvent à des résultats absolument faux.
3. Cette question est en général bien traitée.
4. À cette question, le résultat attendu pouvait se déduire de la question suivante. Cependant, une réponse bien justifiée est attendue. De grandes maladresses de rédaction ont été rencontrées ici.
5. Si l'égalité demandée est en général obtenue, les candidats, en trop grande majorité, n'ont pas toujours précisé la formule utilisée, ni donné un système complet d'événements qui en soit vraiment un. Ainsi,  $((X_k = i), (X_k = i - 1))$  n'est pas un système complet d'événements.
6. Cette question pouvaient être traitée en admettant les questions précédentes. Les candidats l'ayant abordée, l'ont bien traitée.
7. (a) Un raisonnement probabiliste ou par récurrence est possible. Cette question fut globalement bien traitée. Cependant, les preuves par itération ou par « ... » manquaient bien trop de rigueur. L'argument d'indépendance des tirages est ici faux.
  - (b) Les raisonnements précédents sont tout à fait possibles ici, mais il est aussi possible d'inverser dans le problème les boules noires et blanches et ainsi d'obtenir un raisonnement très rapide à cette question.
  - (c) Peu de candidats abordent cette question. Beaucoup se trompent dans la manipulation des indices. Les calculs sont en général mal menés.

## Partie B

8. Beaucoup trop de candidats se contentent de paraphraser le programme sans lier les commandes du programme au problème posé.
9. Trop peu de candidats abordent cette question demandant l'écriture d'une fonction.
10. Cette question est un peu plus abordée que la précédente, mais en général de manière très incomplète.
11. La réponse proposée par les candidats ayant abordé cette question est en général correcte, mais trop rarement justifiée.

## Partie C

12. (a) La démarche attendue à cette question a souvent été rencontrée par les candidats lors de leur préparation. Cependant, les manipulations des sommes posent de grandes difficultés pour les candidats et rendent les calculs faux.
  - (b) Une simple récurrence permettait de répondre à cette question. Très peu de candidats l'ont abordée et s'en sont rendus compte.
  - (c) Cette question est très rarement abordée. Le lien entre  $X_k$  et  $Y_k$  est peu établi.
13. (a) La question est peu abordée, mais donner l'inégalité de Bienaymé Tchebychev est déjà une bonne première piste. Il serait aussi pertinent de vérifier rapidement les hypothèses de cette inégalité. Pour certains candidats maladroits, l'inégalité de Bienaymé Tchebychev s'écrit :

$$P((Z - E(Z)) \leq \alpha) \leq \frac{V(Z)}{\alpha^2}$$

- (b) Cette question n'est que trop rarement abordée. Sa première partie s'apparente à une question de cours. Seuls les bons candidats reconnaissent une convergence en probabilité. Très peu de candidats tentent une justification intuitive, ceux-là le font correctement.

#### Partie D

14. (a) Cette question est abordée par une très grande part des candidats et en général bien réalisée.  
 (b) Les résolutions proposées par les candidats sont très décevantes. Beaucoup affirment qu'on a :  $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ .  
 (c) Cette question est peu abordée et en général de manière très maladroite. Trop de candidats ne pensent pas à utiliser la question précédente et négligent ainsi le verbe employé dans l'énoncé : « En déduire ». Par ailleurs, le degré du polynôme nul n'est pas 0.  
 (d) Cette question est peu abordée, les candidats ne prennent pas assez en considération l'indication donnée. La dimension finie de  $\mathbb{R}_n[X]$ , importante ici, n'apparaît que peu dans les raisonnements proposés.
15. (a) Peu de candidats ont abordé cette question. Trop souvent, le calcul de  $\varphi_{2,1}(P_{2,1})$  n'apparaît pas clairement.  
 (b) Question pratiquement non traitée.
16. (a) Cette question simple est très peu traitée. Une lecture attentive et complète de l'énoncé est toujours fortement conseillée.  
 (b) Cette question est assez délicate et se positionne en fin d'énoncé. Ceci justifie pleinement le nombre très maigre de candidats à l'avoir abordée.  
 (c) Quelques rares candidats ont bien lu et compris l'énoncé. Ils ont alors réussi à résoudre cette question en faisant une synthèse des questions précédentes.
17. (a) Cette question n'est presque pas abordée, mais quand c'est le cas, elle est bien traitée.  
 (b) Cette question n'est presque pas abordée.