ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2016

prépa

1

Mathématiques

Option Scientifique

Mercredi 20 avril 2016 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 7 pages.

CONSIGNES

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, vous devez le restituer aux examinateurs à la fin de la session ou le laisser sur table selon la consigne donnée dans votre centre d'écrits.

Tournez la page s.v.p.

ECRICOME

EXERCICE 1

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note : $\forall n \geqslant 1,\ w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

   (a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$.

   (b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

   (c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ, appelé **constante d'Euler**.

2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

   (b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?

4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.

   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :
$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}dt$$

   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.

5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$
   puis que :
$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$

6. Démontrer alors que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

EXERCICE 2

Le but de cet exercice est d'étudier pour un entier n tel que $n \geqslant 2$ les points critiques de la fonction f définie sur le domaine :

$$\mathcal{D}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$$

par :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln(x_j - x_i)$$

On admettra que $\mathcal{D}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note :

$$\varphi(P) = 4XP'(X) - P''(X).$$

   (a) Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Vérifier que le polynôme $3X - 4X^3$ est un vecteur propre de φ pour une valeur propre à préciser.
   (d) Montrer que φ est diagonalisable et préciser la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

2. On s'intéresse dans cette question (et uniquement dans cette question) au cas $n = 2$. On a donc :

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$$

   et :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 - \ln(y - x) \end{array}$$

   (a) Justifier que f admet des dérivées partielles premières et secondes sur $\mathcal{D}_2$ et les calculer.
   (b) Montrer que f admet un unique point critique : le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.
   (c) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$?

On revient à présent au cas général avec $n \geqslant 2$.

3. On note $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_n$. On note S le polynôme à coefficients réels défini par : $S(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note : $Q_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n}(X - x_i)$. On a donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ S(X) = (X - x_k)Q_k(X).$$

   (a) Calculer $\partial_k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   (b) En déduire que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} = 0$$

   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $S'(x_k) = Q_k(x_k)$ et $S''(x_k) = 2Q_k'(x_k)$.
   (d) Justifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq k\}$, on a :

$$Q_k'(x) = Q_k(x) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x - x_i}$$

(e) En déduire que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0$$

(f) Montrer que u est un point critique de f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X)$$

En observant le terme dominant de S, montrer plus précisément que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff S''(X) - 4XS'(X) + 4nS(X) = 0$$

4. (a) À l'aide des résultats des questions question 1(d) et 3(f), montrer que la fonction f admet au plus un seul point critique sur $\mathcal{D}_n$.

(b) Dans le cas spécifique où $n = 3$, montrer, en utilisant le résultat de la question 1(c), que f admet un unique point critique sur $\mathcal{D}_3$ que l'on déterminera.

PROBLÈME

Partie A

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a(1-x)^b dx$$

et on note $f_{a,b}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^a(1-x)^b & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

1. (a) Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}$$

(c) En déduire que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$$

(d) Justifier que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

2. Dans toute la suite de cette partie, on fixe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et on considère une variable aléatoire réelle X admettant $f_{a,b}$ pour densité. On dit que X **suit la loi *beta* de paramètres** a **et** b.

(a) Montrer que X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{a+1}{a+b+2}$$

(b) Montrer que X admet une variance et que :

$$V(X) = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}$$

(c) Soit F la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (a+b+1)! \displaystyle\sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{x^k(1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition de X.

Partie B

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée

Après n épreuves, l'urne contient donc $a+b+n$ boules.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'événement « on pioche une boule rouge au n-ième tirage ».

3. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n en fonction de n.
4. On souhaite simuler l'expérience grâce à Scilab.

   (a) Compléter la fonction suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

```
function res = tirage(x,y)
        r = rand()
        if .......... then
                res = 0
        else
                res = 1
        end
endfunction
```

   (b) Compléter la fonction suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne contenant initialement a boules rouges et b boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur de X_n :

```
function Xn = experience(a,b,n)
        x = a
        y = b
        for k=1:n
                r = tirage(x,y)
                if r == 0 then
                        x = ..........
                else
                        ...........
                end
        end
        Xn = .........
endfunction
```

   (c) Écrire une fonction Scilab d'en tête :

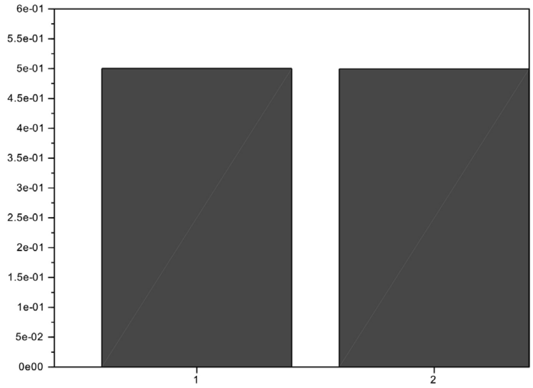
```
        function loi = simulation(a,b,n,m)
```

   qui fait appel `m` fois à la fonction précédente pour estimer la loi de X_n. Le paramètre de sortie sera un vecteur contenant les approximations de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1), \dots, P(X_n = n)$.

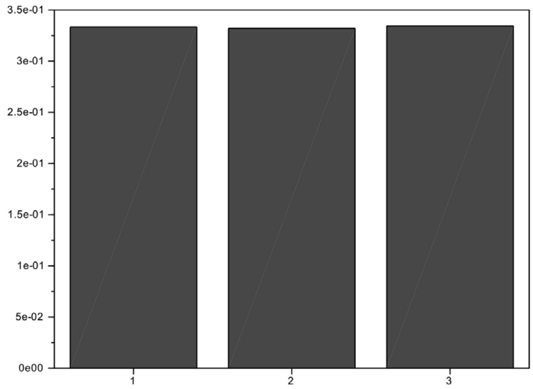
Tournez la page s.v.p.

5. On s'intéresse ici au cas où $a = b = 1$. On utilise la fonction `simulation` avec des valeurs de n entre 1 et 5 et on affiche à chaque fois l'estimation de la loi de X_n sous forme d'un diagramme en « bâtons ».

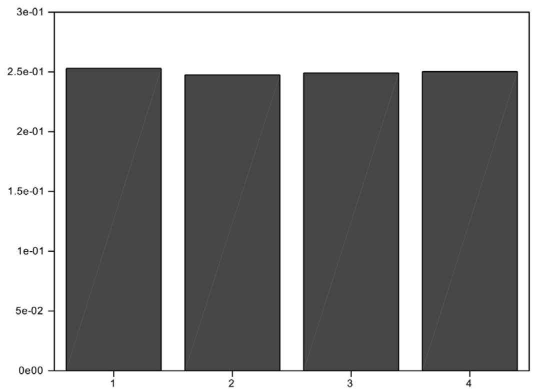
```
--> bar( simulation(1,1,1,100000))
```



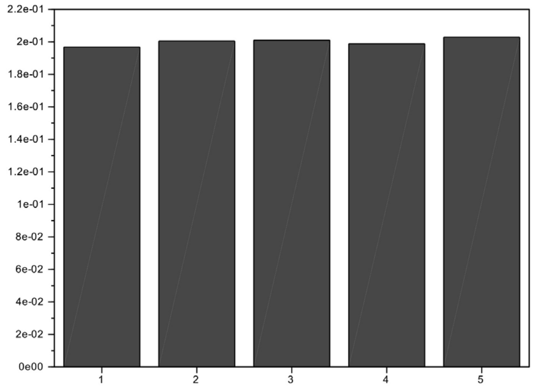

```
--> bar( simulation(1,1,2,100000))
```



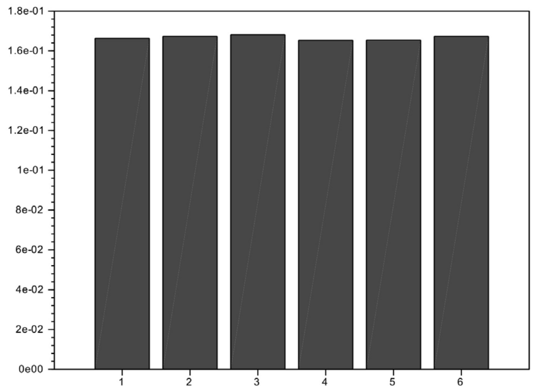

```
--> bar( simulation(1,1,3,100000))
```



```
--> bar( simulation(1,1,4,100000))
```




```
--> bar( simulation(1,1,5,100000))
```



(a) À l'aide de ces résultats, conjecturer la loi de X_n.

(b) Déterminer la loi de X_1.

(c) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \quad \text{avec } \ell \notin \{k, k+1\}$$

(d) En raisonnant par récurrence sur n, prouver la conjecture émise au 5(a).

6. On revient au cas général où a et b sont deux entiers strictement positifs.

(a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculer la probabilité suivante :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \cdots \cap \overline{R_n})$$

(b) Justifier alors que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}$$

(c) En déduire que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = \frac{\dbinom{a+k-1}{a-1}\dbinom{b+n-k-1}{b-1}}{\dbinom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$

(d) Calculer $E(a + X_n)$, puis en déduire que : $E(X_n) = \dfrac{na}{a+b}$

Partie C

On admettra dans cette partie que si a, b et n sont trois entiers strictement positifs, alors pour tout entier naturel $p \in [\![a, a+b+n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{p-a} \binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1} = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{p}{i} \binom{a+b+n-1-p}{a+b-1-i}$$

On reprend pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire X_n étudiée dans la partie précédente, et on note $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$. On note F_n la fonction de répartition de Y_n.

7. (a) Soit $x < 0$. Que vaut $F_n(x)$?
   (b) Soit $x \geqslant 1$. Que vaut $F_n(x)$?
8. On fixe $x \in]0, 1[$. Pour tout réel y, on note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de y, c'est-à-dire le plus grand entier m tel que $m \leqslant y$. On rappelle qu'alors on a $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$.
   (a) Justifier que $F_n(x) = P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor)$.
   (b) A l'aide de la formule sommatoire admise en début de la partie C, prouver que :
   $$F_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i} \binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}}{\displaystyle\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$
   (c) Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\binom{m}{j}$ lorsque m tend vers $+\infty$.
   (d) Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (On obtiendra un résultat sous forme d'une somme qu'on ne tentera pas de calculer).
9. Déterminer $F_n(0)$ puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.
10. Déduire de ce qui précède que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi Beta dont on explicitera les paramètres.
11. A l'aide du résultat de la question 6(d) de la partie B, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $E(Y_n)$ et commenter ce résultat à la lumière de la question précédente.

2016

CORRIGÉ

MATHÉMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

VOIE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

OPTION SCIENTIFIQUE…………

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

ESPRIT GÉNÉRAL

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. (a) D'après le cours, lorsque x tend vers 0 :

(b)
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln(1+\frac{1}{n}) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

(c) La série de terme général $-\frac{1}{2n^2}$ est à termes négatifs et convergente (série de Riemann). Par équivalence de séries à termes généraux de signe constant, il vient que la série $\sum(w_{n+1}-w_n)$ est convergente. Il existe donc un réel ℓ tel que $\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1}-w_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, autrement dit (somme télescopique), $w_n - w_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, autrement dit la suite (w_n) converge.

2. La fonction φ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ (par quotient de fonctions continues et dérivables sur cet intervalle, la fonction $t \mapsto t$ ne s'annulant pas sur l'intervalle en question).
Sa dérivée est donnée par : $\forall t \in]0,+\infty[,\ \varphi'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$. On en déduit les variations de φ (les limites étant $-\infty$ en 0^+ par quotient, et 0 en $+\infty$ par croissances comparées) :

t	0		e		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

3. (a) Pour tout $n \geqslant 2$, on a :
$$S_{2n+2}-S_{2n} = u_{2n+2}+u_{2n+1} = \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \leqslant 0 \text{ car } \varphi \text{ est décroissante sur }]2n+1;2n+2[$$
Donc la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
De la même manière :
$$S_{2n+3}-S_{2n+1} = u_{2n+3}+u_{2n+2} = -\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \geqslant 0 \text{ car } \varphi \text{ est décroissante sur }]2n+2;2n+3[$$
Et donc la suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ est croissante.
D'autre part :
$$S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Donc les deux suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

(b) Les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ étant adjacentes, elles convergent vers une même limite réelle L. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe donc $N_1 \geqslant 0$ tel que $\forall n \geqslant N_1, |S_{2n} - L| \leqslant \varepsilon$ et il existe $N_2 \geqslant 0$ tel que $\forall n \geqslant N_2, |S_{2n+1} - L| \leqslant \varepsilon$, donc $\forall n \geqslant \max(2N_1, 2N_2+1),\ |S_n - L| \leqslant \varepsilon$.
Cela traduit donc que la suite (S_n) converge vers le réel L également. En d'autres termes, la série de terme général u_n est convergente.
Observant que :

$$\forall n \geqslant 3,\ |u_n| = \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

il vient, par comparaison à la série harmonique, que $\sum |u_n|$ est divergente et donc que la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente.

4. (a) D'après les variations de φ, pour tout $n \geqslant 3$ φ est décroissante sur $[n; n+1]$ (car $e < 3$). Donc :

$$\forall n \geqslant 3,\ \forall t \in [n; n+1],\ \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \varphi(t)$$

Et par positivité de l'intégrale $(n < n+1)$, on en déduit que :

$$\forall n \geqslant 3,\ \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t$$

(b) $\dfrac{\ln(t)}{t}$ est de la forme $u'(t)u(t)$ avec $u(t) = \ln t$, ce qui permet d'intégrer directement :

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}[\ln^2(n+1) - \ln^2(n)]$$

Mais alors il vient que pour tout $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t \\ &\leqslant 0 \ \text{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
Selon le même principe que dans la question précédente, la décroissance de φ sur l'intervalle $[n; n+1]$ pour $n \geqslant 3$ montre que :

$$\forall n \geqslant 3,\ \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}[\ln^2(n+1) - \ln^2(n)]$$

Donc pour tout $k \geqslant 3$, il vient que :

$$\frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}[\ln^2(k+1) - \ln^2(k)] \geqslant 0$$

En sommant cette inégalité pour k allant de 3 à n il vient que :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}\ln^2(n+1) + \frac{1}{2}\ln^2(3) \geqslant 0$$

Et donc :

$$\begin{aligned} v_n &\geqslant \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2(n) - \frac{1}{2}\ln^2(3) + \frac{1}{2}\ln(2) \\ &\geqslant -\frac{1}{2}\ln^2(3) + \frac{1}{2}\ln(2) \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est donc minorée, et décroissante, donc convergente.

5. Soit $n \geqslant 1$. Introduisons les deux quantités suivantes :

$$\alpha_n = \sum_{1 \leqslant 2p \leqslant 2n} \frac{\ln(2p)}{2p} \quad \text{et} \quad \beta_n = \sum_{1 \leqslant 2p+1 \leqslant 2n} \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}$$

On a alors $S_{2n} = \alpha_n - \beta_n$. Et d'autre part : $\alpha_n + \beta_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \alpha_n - \beta_n \\ &= \alpha_n - \Big(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \alpha_n \Big) \\ &= 2\alpha_n - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= 2 \sum_{1 \leqslant 2p \leqslant 2n} \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \end{aligned}$$

A l'aide de cette dernière formule, on calcule :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2) + \ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \Big(v_n + \frac{[\ln(n)]^2}{2} \Big) - \Big(v_{2n} + \frac{[\ln(2n)]^2}{2} \Big) \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{[\ln(2) + \ln(n)]^2}{2} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{\ln^2(2) + \ln^2(n) + 2\ln(2)\ln(n)}{2} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\ln(n) \end{aligned}$$

6. La formule obtenue à la question précédente donne :

$$\forall n \geqslant 1,\ S_{2n} = \ln(2) w_n + v_n - v_{2n} - \frac{\ln^2(2)}{2}$$

La suite (v_n) étant convergente, par unicité de la limite, on a $\lim_{n \to +\infty} v_{2n} = \lim_{n \to +\infty} v_n$. Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, il vient alors que : $\lim_{n \to +\infty} S_{2n} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln^2(2)}{2}$. De plus, la suite (S_n) étant convergente, par unicité de la limite, on a $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} S_{2n}$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln^2(2)}{2}$$

EXERCICE 2

1. (a) Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda P+Q) = 4X(\lambda P+Q)'(X)-(\lambda P+Q)''(X) = \lambda 4X P'(X)+4XQ'(X)-\lambda P''(X)-Q''(X) = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$$

L'application φ est donc linéaire.
De plus, si P est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, alors P est de degré inférieur ou égal à n.
Alors $\deg(P') \leqslant n-1$ et donc $\deg(XP'(X)) \leqslant n$, et on a $\deg(P'') \leqslant n-2$. Ainsi $\varphi(P)$ est une combinaison linéaire de deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n, donc il est lui-même élément de $\mathbb{R}_n[X]$.
Donc φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 4X$, et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\varphi(X^k) = 4kX^k - k(k-1)X^{k-2}$. On en déduit l'écriture de la matrice associée à φ dans la base canonique:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & 4 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 8 & \ddots & -k(k-1) & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & 4k & \ddots & -n(n-1) \\ & (0) & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & 4n \end{pmatrix}$$

(c) Le polynôme $3X - 4X^3$ n'est pas le polynôme nul et on a :

$$\varphi(3X - 4X^3) \quad = \quad 4X(3 - 12X^2) - (-24X) = 36X - 48X^3 = 12(3X - 4X^3)$$

Donc $3X - 4X^3$ est vecteur propre de φ, associé à la valeur propre 12.

(d) La matrice de φ est triangulaire supérieure. On lit donc ses valeurs propres directement sur sa diagonale : on a donc $Sp(\varphi) = \{0, 4, 8, \ldots, 4n\} = \{4k,\ k \in [\![0, n]\!]\}$. L'endomorphisme φ admettant ainsi $n+1$ valeurs propres distinctes, étant un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$, l'application φ est bien diagonalisable et chacun de ses espaces propres est de dimension 1.

(a) Les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto y - x$ sont polynomiales, donc admettent bien des dérivées partielles premières et secondes sur $\mathcal{D}_2$. La fonction $(x, y) \mapsto y - x$ étant à valeurs dans $]0, +\infty[$ sur $\mathcal{D}_2$ et ln étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, par composition la fonction $(x, y) \mapsto \ln(y - x)$ admet bien également des dérivées paretielles premières et secondes sur fonction $\mathcal{D}_2$, par somme f en admet aussi. On obtient que pour tout (x, y) de $\mathcal{D}_2$:

$$\partial_1 f(x, y) = 2x + \frac{1}{y-x} \qquad \partial_2 f(x, y) = 2y - \frac{1}{y-x}$$

$$\partial^2_{1,1} f(x, y) = 2 + \frac{1}{(y-x)^2} \qquad \partial^2_{2,2} f(x, y) = 2 + \frac{1}{(y-x)^2} \qquad \partial^2_{1,2} f(x, y) = \partial^2_{2,1} f(x, y) = -\frac{1}{(y-x)^2}$$

(b) Soit (x, y) un point de $\mathcal{D}_2$.

$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y) &= 0 \\ \partial_2 f(x, y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + \frac{1}{y-x} &= 0 \\ 2y - \frac{1}{y-x} &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - \frac{1}{2x} &= 0 \\ y &= -x \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2 &= 1 \\ y &= -x \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -\frac{1}{2} \\ y &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

(l'autre solution du système, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, a été écartée car elle n'est pas dans $\mathcal{D}_2$).

Donc f admet un unique point critique, le point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(c) La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ étant de taille 2 elle admet deux valeurs propres au maximum.
Comme $A - 4I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles (car de rang 1), on en déduit que 2 et 4 sont des valeurs propres de A et ce sont les seules possibles : $Sp(A) = \{2, 4\}$.
La matrice hessienne de f au point critique $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est donc : $\nabla^2(f)(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = A$.
On vient de voir que cette matrice admet deux valeurs propres strictement positives, donc la fonction f admet un minimum local en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3. (a) Lorsqu'on dérive par rapport à la k-ième variable, on peut oublier tous les termes dans les sommes qui ne dépendent pas de x_k.
Donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\partial_k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \partial_k g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec :

$$g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < k} \ln(x_k - x_i) - \sum_{k < j \leqslant n} \ln(x_j - x_k)$$

On obtient donc : $\partial_k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2x_k - \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < k} \frac{1}{x_k - x_i} - \sum_{k < j \leqslant n} \left(-\frac{1}{x_j - x_k}\right) = 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}$.

(b) Par définition d'un point critique :

$$u \text{ est un point critique} \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ \partial_k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} = 0$$

(c) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $S(X) = (X - x_k)Q_k(X)$.
En dérivant cette relation on obtient : $S'(X) = (X - x_k)Q_k'(X) + Q_k(X)$.
Et en évaluant cette relation en x_k, il vient que : $S'(x_k) = Q_k(x_k)$.
En dérivant encore une fois, on obtient : $S''(X) = (X - x_k)Q_k''(X) + 2Q_k'(X)$.
En évaluant cette dernière relation en x_k, il vient que : $S''(x_k) = 2Q_k'(x_k)$.

(d) A partir de la définition de $Q_k(X)$, on sait que : $Q_k(x) = \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i)$. On obtient ainsi la dérivée de Q_k :

$$Q_k'(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, i}}^{n} (x - x_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{Q_k(x)}{x - x_i} = Q_k(x) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x - x_i}$$

(e) On calcule à l'aide des questions précédentes pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 2Q'(x_k) - 4x_k Q_k(x_k) = -2Q_k(x_k)\Big(2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}\Big)$$

Puisque $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, on a que $Q_k(x_k) \neq 0$. La condition pour que u soit un point critique devient donc :

$$\begin{aligned} u \text{ est un point critique} &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
u \text{ est un point critique} \quad &\iff \forall k \in [\![1,n]\!], x_k \text{ est racine de } S''(X) - 4XS'(X) \\
&\iff \exists Q \in \mathbb{R}[X] \mid S''(X) - 4XS'(X) = Q(X)\prod_{k=1}^{n}(X - x_k) \\
&\iff \exists Q \in \mathbb{R}[X] \mid S''(X) - 4XS'(X) = S(X)Q(X) \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X) \\
&\quad\ (\text{car } S(X) \text{ et } S''(X) - 4XS'(X) \text{ sont de même degré !})
\end{aligned}$$

Le polynôme $S(X)$ est de degré n et son coefficient dominant vaut 1.
Donc $S''(X) - 4XS'(X)$ est aussi de degré n, et son coefficient dominant est $-4n$.
Donc pour que $S''(X) - 4XS'(X)$ et $\lambda S(X)$ soient égaux, il faut en particulier qu'ils aient même coefficient dominant, et donc que $\lambda = -4n$.
Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X) \Longrightarrow S''(X) - 4XS'(X) = -4nS(X)$.
Et la réciproque est évidente.
Donc au final :

$$u \text{ est un point critique} \iff S''(X) - 4XS'(X) + 4nS(X) = 0$$

4. (a) Si u est un point critique, alors le polynôme $S(X)$ est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $4n$. De plus, le coefficient dominant de $S(X)$ vaut 1.
Or on sait que les espaces propres de φ sont tous de dimension 1, et donc en particulier l'espace propre associé à $4n$ est de dimension 1. Tous les polynômes de cet espace propre sont donc colinéaires, et donc il y en a un seul qui est de coefficient dominant 1.
Donc le polynôme $S(X)$ (s'il existe ...) est unique, et donc f admet au plus un point critique.

   (b) On a vu que le polynôme $3X - 4X^3$ est vecteur propre de φ, associé à la valeur propre 12.
Donc le polynôme $X^3 - \frac{3}{4}X$ est lui aussi vecteur propre de φ, associé à la valeur propre $12 = 4n$.
Or $X^3 - \dfrac{3}{4}X = X(X - \dfrac{\sqrt{3}}{2})(X + \dfrac{\sqrt{3}}{2})$.
D'après la question 3, il vient que f admet un unique point critique sur $\mathcal{D}_3$, le point $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

PROBLÈME

Partie A

1. (a) Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a : $I_{a,0} = \displaystyle\int_0^1 x^a \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1}$.

   (b) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$I_{a,b} = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}(1-x)^b\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{a+1}}{a+1}(-b)(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x = 0 + \frac{b}{a+1}\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x = \frac{b}{a+1}I_{a+1,b-1}$$

   (c) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
I_{a,b} &= \frac{b}{a+1}I_{a+1,b-1} = \frac{b}{a+1} \times \frac{b-1}{a+2}I_{a+2,b-2} = \cdots = \frac{b}{a+1} \times \frac{b-1}{a+2} \times \frac{b-2}{a+3} \times \cdots \times \frac{1}{a+b}I_{a+b,0} \\
&= \frac{b!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}I_{a+b,0} = \frac{a! \times b!}{(a+b)!} \times \frac{1}{a+b+1} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}
\end{aligned}$$

(d) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$:

- la fonction $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0 et en 1 (si $a=0$ ou $b=0$),
- la fonction $f_{a,b}$ est positive sur $\mathbb{R}$,
- Enfin,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^a (1-x)^b \mathrm{d}x = \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} \times I_{a,b} = 1.$$

Donc $f_{a,b}$ est bien une densité de probabilité.

2. (a) La variable X étant bornée, X admet nécessairement un moment de tout ordre. En particulier X admet une espérance et on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^{a+1}(1-x)^b \mathrm{d}x \\ &= \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} I_{a+1,b} = \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} \times \frac{(a+1)! \times b!}{(a+b+2)!} = \frac{a+1}{a+b+2} \end{aligned}$$

(b) Comme vu à la question précédente, X admet un moment d'ordre 2 (car X bornée), donc X admet une variance. De plus,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^{a+2}(1-x)^b \mathrm{d}x \\ &= \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} I_{a+2,b} = \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} \times \frac{(a+2)! \times b!}{(a+b+3)!} = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+b+2)(a+b+3)} \end{aligned}$$

D'où on tire que :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{(a+1)(a+2)}{(a+b+2)(a+b+3)} - \left(\frac{a+1}{a+b+2}\right)^2 \\ &= \frac{a+1}{(a+b+2)^2(a+b+3)}\Big[(a+2)(a+b+2) - (a+1)(a+b+3)\Big] \\ &= \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+2)^2(a+b+3)} \end{aligned}$$

(c) Notons F_X la fonction de répartition de X.
Puisque la densité de X est nulle en dehors de l'intervalle $[0;1]$, on a immédiatement que :

- $\forall x < 0$, $F_X(x) = 0$.
- $\forall x \geqslant 1$, $F_X(x) = 1$.

La fonction F est continue et dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ (sur cet intervalle, c'est un polynôme).

Calculons sa dérivée :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (a+b+1)! \sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{kx^{k-1}(1-x)^{a+b+1-k} - (a+b+1-k)x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b+1-k)!} \\
&= (a+b+1)! \Big[\sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{kx^{k-1}(1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} - \sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{(a+b+1-k)x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b+1-k)!} \Big] \\
&= (a+b+1)! \Big[\sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{x^{k-1}(1-x)^{a+b+1-k}}{(k-1)!(a+b+1-k)!} - \sum_{k=a+1}^{a+b} \frac{(a+b+1-k)x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b+1-k)!} \Big] \\
&= (a+b+1)! \Big[\sum_{k=a}^{a+b} \frac{x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b-k)!} - \sum_{k=a+1}^{a+b} \frac{x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b-k)!} \Big] \\
&= (a+b+1)! \Big[\frac{x^a(1-x)^b}{a! \times b!} \Big] = f_{a,b}(x)
\end{aligned}$$

De plus on a $F(0) = 0$, donc $\forall x \in [0,1]$, $F(x) = F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f_{a,b}(t)\mathrm{d}t = F_X(x)$.
On a donc que pour tout réel x, $F_X(x) = F(x)$. En d'autres termes, F est bien la fonction de répartition de X.

Partie B

3. Chacun des n tirages effectués est susceptible de donner une boule rouge ou blanche. Donc $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

4. (a)

```
function res = tirage(x,y)
    r = rand()
    if r<x/(x+y) then
        res = 0
    else
        res = 1
    end
endfunction
```

(b)

```
function Xn = experience(a,b,n)
    x = a
    y = b
    for k=1:n
        r = tirage(x,y)
        if r==0 then
            x = x + 1
        else
            y = y + 1
        end
    end
    Xn = x - a
endfunction
```

(c)

```
function loi=simulation(a,b,n,m)
    loi = zeros(1,n+1)
    for k = 1:m
        Xn = experience(a,b,n)
        loi(Xn+1) = loi(Xn+1) + 1/m
    end
endfunction
```

5. (a) Les résultats obtenus laissent penser que X_n suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

(b) Puisque l'urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche, la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage est $1/2$. On a donc $P(X_1 = 1) = 1/2$ et $P(X_1 = 0) = 1/2$.
X_1 suit dont la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ (qui est aussi incidemment la loi uniforme sur $[\![0, 1]\!]$).

(c) Si $[X_n = k]$ est réalisé, alors l'urne contient avant le $n+1$-ième tirage $k+1$ boules rouges et $n-k+1$ boules blanches. Alors X_{n+1} vaudra k ou $k+1$ selon que l'on pioche au $(n+1)$-ième tirage une boule blanche ou une boule rouge. Donc :

$$\begin{aligned}
P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k) &= \frac{n-k+1}{n+2}\\
P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1) &= \frac{k+1}{n+2}\\
P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) &= 0 \text{ pour } \ell \notin \{k,k+1\}
\end{aligned}$$

(d) Montrons donc par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.
La question (b) montre que la propriété est vraie pour $n=1$.
Supposons que pour un certain n$\in \mathbb{N}^*$ on a X_n qui suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=k) &= \sum_{i=0}^{n} P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=k)\times P(X_n=i) \text{ (formule des probabilités totales)}\\
&= P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)\times P(X_n=k-1)+P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)\times P(X_n=k)\\
&= \frac{k}{n+2}\times\frac{1}{n+1}+\frac{n-k+1}{n+2}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Il reste à calculer $P(X_{n+1}=0)$ et $P(X_{n+1}=n+1)$:

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=0) &= \sum_{i=0}^{n} P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=0)\times P(X_n=i)\\
&= P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0)\times P(X_n=0)\\
&= \frac{n+1}{n+2}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+2}\\
P(X_{n+1}=n+1) &= \sum_{i=0}^{n} P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=n+1)\times P(X_n=i)\\
&= P_{[X_n=n]}(X_{n+1}=n+1)\times P(X_n=n)\\
&= \frac{n+1}{n+2}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, il vient que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a X_n qui suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

6. (a)

$$\begin{aligned}
&P(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k\cap\overline{R_{k+1}}\cap\overline{R_{k+2}}\cap\cdots\cap\overline{R_n})\\
=\ &P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)\times\cdots\times P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k)\times P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k}(\overline{R_{k+1}})\\
&\times P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k\cap\overline{R_{k+1}}}(\overline{R_{k+2}})\times\cdots\times P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k\cap\overline{R_{n-1}}}(\overline{R_n})\\
=\ &\frac{a}{a+b}\times\frac{a+1}{a+b+1}\times\cdots\times\frac{a+k-1}{a+b+k-1}\times\frac{b}{a+b+k}\times\frac{b+1}{a+b+k+1}\times\cdots\times\frac{b+n-k-1}{a+b+n-1}\\
=\ &\frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}
\end{aligned}$$

(b) Il y a $\binom{n}{k}$ successions de tirages différentes qui réalisent l'événement $[X_n=k]$ (selon le choix des k tirages qui vont produire une boule rouge parmi les n). Chacune de ces successions de tirages ressemble à celle dont on a calculé la probabilité à la question précédente, à l'ordre près.

La probabilité de chacune de ces successions de tirages va être la même que celle qui a été calculée à la question précédente : le dénominateur sera exactement le même, et le numérateur comportera exactement les mêmes facteurs, mais dans un ordre différent.

Donc $P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}$.

(c)

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!} \\
&= \frac{n!(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{k!(n-k)!(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!} \\
&= \frac{n!(a+b-1)!}{(a+b+n-1)!} \times \frac{(a+k-1)!}{k!(a-1)!} \times \frac{(b+n-k-1)!}{(n-k)!(b-1)!} \\
&= \frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
E(a+X_n) &= \sum_{k=0}^{n} (a+k) P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(a+k)\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a\binom{a+k}{a}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \\
&= \frac{a}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{a+k}{a}\binom{b+n-k-1}{b-1} \\
&= \frac{a}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \binom{a+b+n}{a+b} \\
&\quad \text{(du fait de } \textstyle\sum P(X_n = k) = 1 \text{ avec } a+1 \text{ boules rouges et } b \text{ blanches)} \\
&= \frac{a(a+b+n)}{a+b}
\end{aligned}$$

Et alors il vient que : $E(X_n) = E(a+X_n) - a = \frac{a(a+b+n)}{a+b} - a = \frac{an}{a+b}$.

Partie C

7. (a) Puisque X_n prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$, $Y_n \in [0, 1]$.
   Donc si $x < 0$, $F_n(x) = 0$.

   (b) Pour la même raison, si $x \geqslant 1$ alors $F_n(x) = 1$.

8. (a) $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(X_n \leqslant nx) = P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor)$ (car X_n ne prend que des valeurs **entières**).

   (b)

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \\
&= \frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1} \\
&= \frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}
\end{aligned}$$

(Grâce à la formule admise, appliquée à $p = a + \lfloor nx \rfloor$ qui est bien dans $[\![a, a+b+n-1]\!]$ puisque $\lfloor nx \rfloor \leqslant n$ et $b \geqslant 1$)

(c) On obtient que :

$$\begin{aligned}
\binom{m}{j} &= \frac{m!}{j!(m-j)!} \\
&= \frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)}{j!} \\
&\underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{m^j}{j!}
\end{aligned}$$

(car chaque terme du produit au numérateur est équivalent à m)

(d) Remarquons tout d'abord que puisque $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$, on a $\lfloor nx \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$.
De même, on a $n(1-x) \leqslant n - \lfloor nx \rfloor < n(1-x) + 1$ et donc $n - \lfloor nx \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} n(1-x)$.
Et donc en particulier ces deux quantités tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ (car $x \in]0,1[$).
Alors on a :

$$\begin{aligned}
\binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(nx)^i}{i!} \\
\binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{[n(1-x)]^{a+b-1-i}}{(a+b-1-i)!} \\
\binom{a+b+n-1}{a+b-1} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{a+b-1}}{(a+b-1)!}
\end{aligned}$$

Et donc par produit d'équivalents pour tout $i \in [\![a; a+b-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^i x^i n^{a+b-1-i}(1-x)^{a+b-1-i}(a+b-1)!}{i!(a+b-1-i)!n^{a+b-1}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i}
\end{aligned}$$

Et donc, en sommant ces limites pour i allant de a à $a+b-1$, on obtient que :

$$F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i}$$

9.

$$F_n(0) = P(Y_n \leqslant 0) = P(X_n \leqslant 0) = P(X_n = 0) = \frac{\binom{b+n-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{n^{b-1}}{(b-1)!}}{\frac{n^{a+b-1}}{(a+b-1)!}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(a+b-1)!}{(b-1)!n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$$

10. Lorsque $n \to +\infty$, F_n tend vers la fonction de répartition de la loi Beta de paramètres $a-1$ et $b-1$. Donc la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi Beta de paramètres $a-1$ et $b-1$.

11.

$$E(Y_n) \quad = \quad E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{a}{a+b} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{a+b}$$

Cette limite est justement l'espérance de la loi Beta de paramètres $a-1$ et $b-1$, ce qui n'est pas étonant puisque (Y_n) tend en loi vers la oi Beta de paramètres $a-1$ et $b-1$.
Mais on ne pouvait pas en être sûr avant d'avoir fait le calcul, car la convergence en loi n'implique pas *a priori* la convergence des espérances.

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,22 et un écart-type de 4,84, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice proposait ici l'étude la somme d'une série semi-convergente, en utilisant pour cela la constante d'Euler.
Dans la plupart des questions, les résultats étaient donnés, ce qui permettait aux candidats d'avancer dans le sujet même s'ils peinaient pour la résolution d'une question. Le sujet était volontairement progressif, les trois premières questions étant classiques et abordables, les dernières questions plus délicates.

1. (a) Cette question de cours a été bien traitée par moins de la moitié des candidats, ce qui est fort regrettable. Les réponses ont été très variées et parfois assez farfelues.

   (b) Nombreux sont les candidats confondant développement limité et équivalent. Le résultat étant donné dans l'énoncé, plusieurs candidats ont miraculeusement obtenu le bon résultat à partir de leurs développements limités précédents même erronés. De manière générale, les correcteurs n'apprécient guère ce genre de truanderie.

   (c) La convergence de la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ est en général bien faite, même s'il est dommage que les candidats mentionnent des séries à termes positifs alors qu'ils sont clairement en présence de la série de terme général $-1/2n^2$. Peu nombreux sont ceux ayant pu alors finir la question. La principale erreur était de mentionner que la suite $(w_{n+1} - w_n)$ tendait vers 0 et donc que la suite (w_n) convergeait ... Signalons que les « séries télescopiques » ne sont pas explicitement au programme et ne peuvent donc constituer un résultat du cours, les candidats ayant redémontré la convergence de la suite, même rapidement, ont été valorisés.

2. Cette question, de niveau très facile (elle peut être résolue par un élève de terminale), n'a pas toujours été bien traitée malheureusement. Le tableau de variations est parfois complètement inversé. Beaucoup d'erreurs ont été remarquées pour la limite en 0, qui n'était pourtant pas une forme indéterminée.

3. (a) La définition des suites adjacentes est bien connue des candidats. Cependant, un nombre non négligeable de candidats étudient le signe de $S_{2n+1} - S_{2n}$ pour étudier la monotonie de la suite (S_{2n}).

   (b) Le théorème faisant le lien entre les convergences des suites extraites d'indices pairs/impairs et la convergence de la suite générale n'étant pas explicitement au programme, les correcteurs ont été indulgents pour les candidats connaissant le résultat sans le redémontrer.
   Certains candidats ont essayé néanmoins d'établir la (non)-convergence absolue, mais souvent avec peine.

4. (a) Cette question a été relativement bien traitée par les candidats.

   (b) Peu ont abordé cette question dans son intégralité. Même la décroissance de la suite s'est révélée difficile pour la plupart des candidats.

5. Beaucoup de candidats font un changement d'indice $j = 2k$ dans la première somme, ce qui n'est bien entendu pas la bonne démarche. Les calculs présentés dans cette question sont souvent mal présentés et peu lisibles, donnant l'impression de vouloir noyer le correcteur dans les calculs et d'arriver au résultat miraculeusement.
   Certains procèdent par récurrence et montrent alors correctement les égalités, mais perdent un peu de temps par ce choix de raisonnement. La seconde égalité, qui était pourtant plus facile à obtenir, a été moins abordée.

6. La dernière question pouvait être abordée à l'aide des résultats des questions précédentes, et certains candidats ont pu concluresi très peu ont précisé que les suites (S_n) et (S_{2n}) avaient la même limite.

Exercice 2

Cet exercice mélangeait algèbre linéaire et analyse, et offrait de nombreuses questions abordables pour des élèves moyens. Il est de difficulté croissante et se termine par des questions de synthèse un peu plus délicates.

1. (a) Question globalement bien traitée par les candidats.

   (b) Certains candidats écrivent la matrice de façon incomplète. Ici, les correcteurs attendaient au minimum les trois premières colonnes et la dernière écrites correctement, et la matrice devait apparaître clairement triangulaire, ce qui n'était pas forcément évident sur certaines copies. Trop souvent les signes négatifs étaient oubliés sur la deuxième diagonale non nulle.

   (c) L'oubli de la mention que le vecteur est non nul pour être un vecteur propre est récurrent.

   (d) Les candidats ont été moins nombreux que les années précédentes à donner des raisonnements hasardeux pour la diagonalisabilité. Nombreux sont ceux qui affirment que toute matrice triangulaire est diagonalisable !
   Les candidats affirmant que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n$ sont forcément sanctionnés dans la notation même si le reste du raisonnement est correct.

2. (a) Même si c'était explicitement demandé par la question, peu de candidats justifient l'existence des dérivées partielles. On attendait l'étude de $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto \ln(y - x)$ séparément, l'une étant polynomiale, l'autre étant une composée à exhiber. Les calculs à proprement parler des dérivées partielles sont parfois assez surprenants. Les notations officielles au programme ne sont pas toujours utilisées, ou mal utilisées.

   (b) Tous les candidats connaissent la définition du point critique, mais la résolution du système s'avère en général très longue et parfois incomplète. Peu d'étudiants expliquent les raisons les amenant à éliminer un cas.

(c) Pour la recherche des valeurs propres, de nombreuses méthodes diverses sont employées, par le déterminant, par le calcul du rang, par l'utilisation de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, par l'obtention d'une valeur propre puis l'autre à l'aide de la trace, ... En grande majorité, la détermination des valeurs propres est correcte quand elle est faite.
Signalons que pour indiquer que deux matrices sont équivalentes, le symbole « $\Leftrightarrow$ » est abusif.
Le lien entre la matrice proposé et la matrice hessienne n'a pas été beaucoup établi, même s'il était simple.

3. (a) Peu de candidats ont réellement calculé les dérivées partielles d'ordre 1 de f, se contentant de recopier le résultat de la question suivante, ces candidats-là n'ont alors pas eu de points sur cette question.
   (b) Question bien traitée par les candidats.
   (c) Cette question a ici également été plutôt bien traitée par les candidats.
   (d) Cette question a été peu traitée dans son ensemble. Quelques rares candidats ont pensé à faire apparaître une dérivée logarithmique avec succès.
   (e) Les raisonnements ont été ici assez confus, indiquant le manque d'aisance des candidats. Le fait qu'il faille montrer une équivalence ne préoccupe que les excellents candidats, les autres faisant mine de l'ignorer.
   (f) La question était plus délicate et peu de candidats ont réussi à la résoudre avec rigueur et précission.
4. La question a été peu abordée par les candidats, sûrement faute de temps, pour pouvoir aborder le problème plus abondamment.

Problème

Le problème proposé cette année modélisait une urne de Polya. On s'intéressait à la convergence en loi de la proportion de tirages d'une couleur précise sur les n premiers tirages, cette proportion convergeant en loi vers une loi Beta explicitée en début de problème.
Le problème était assez long et permettait d'insérer des questions de modélisation informatique. Il était voulu de manière progressive, pour permettre de départager les candidats. Il fut finalement traité partiellement, sûrement en raison de la longueur du sujet, les candidats ayant peut-être perdu un peu de temps sur l'exercice 2. Nous invitons les candidats à davantage prendre le temps de bien lire le sujet en entier en début d'épreuve et de bien repérer les questions abordables.
Les questions informatiques ont été plus traitées que les années précédentes. Les questions se voulaient également progressives, car l'écriture d'un programme complet n'est souvent pas traitée par les candidats, alors que compléter ou interpréter un programme semble plus abordable.

Partie A

1. (a) Question bien traitée par une majorité de candidats. Certains candidats maladroits ont bien déterminé la primitive de $x \mapsto x^a$, mais ont ensuite remplacé a par 1 puis 0, ou ont affecté ces valeurs de 0 et 1 à a et x en même temps ...
   (b) L'intégration par parties est en général bien faite, même si les hypothèses ne sont pas toujours vérifiées.
   (c) Il est regrettable que trop peu de candidats abordent cette question pourtant élémentaire avec le résultat de la question précédente. La récurrence est rarement utilisée, et trop souvent les candidats vérifient l'expression pour $(a, 0)$, éventuellementp our $(a, 1)$ et concluent par « de même ». D'autres partent de la question précédente, la reproduisent au rang suivant, et concluent directement.
   (d) Question bien traitée par une majorité de candidats. Les hypothèses à vérifier sont bien connues par les étudiants.
2. (a) Question bien traitée par une majorité de candidats.

(b) Question bien traitée par une majorité de candidats.

(c) Peu de candidats ont compris qu'il s'agissait de vérifier que F était continue, dérivable presque-partout et que la dérivée de F coïncidait avec $f_{a,b}$. En général, les candidats ont tenté d'intégrer la fonction $f_{a,b}$ sans aboutir dans leur calcul.

Partie B

3. Question bien traitée par une majorité de candidats.
4. (a) De nombreux candidats ont abordé cette question avec succès.

   (b) Certains candidats n'avaient pas vu que a et b ne varient pas dans l'exercice et ont donc complété le programme de manière erronée.

   (c) Étrangement, beaucoup de candidats n'ont pas du tout traité cette question, alors même qu'ils avaient abordé avec succès les questions précédentes. Le fait d'écrire un programme en entier semble décourager les candidats.
5. La plupart des candidats abordant la question ont reconnu une loi uniforme, mais certains ont été gênés par les abscisses proposées par les diagrammes représentés dans l'énoncé, proposant alors une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$ plutôt que $[\![0, n]\!]$, alors même qu'ils avaient répondu correctement à la question 3.
   Les questions (b), (c), (d) sont peu traitées, et beaucoup oublient que l'hypothèse $a = b = 1$ a été faite dans cette question, obtenant alors des résultats compliqués.
6. Sur les candidats se risquant à aborder cette question, beaucoup se trompent dans les indices dans la question (a), ou alors utilisent des arguments erronés comme l'indépendance des événements.

Partie C

7. Question bien traitée par une majorité de candidats.
8. Seule la question (c) a souvent été abordée, mais souvent sans justification. Les questions suivantes n'ont pas ou peu été abordées, par manque de temps des candidats. Soulignons que certaines excellentes copies ont réussi à traiter le problème dans son intégralité.